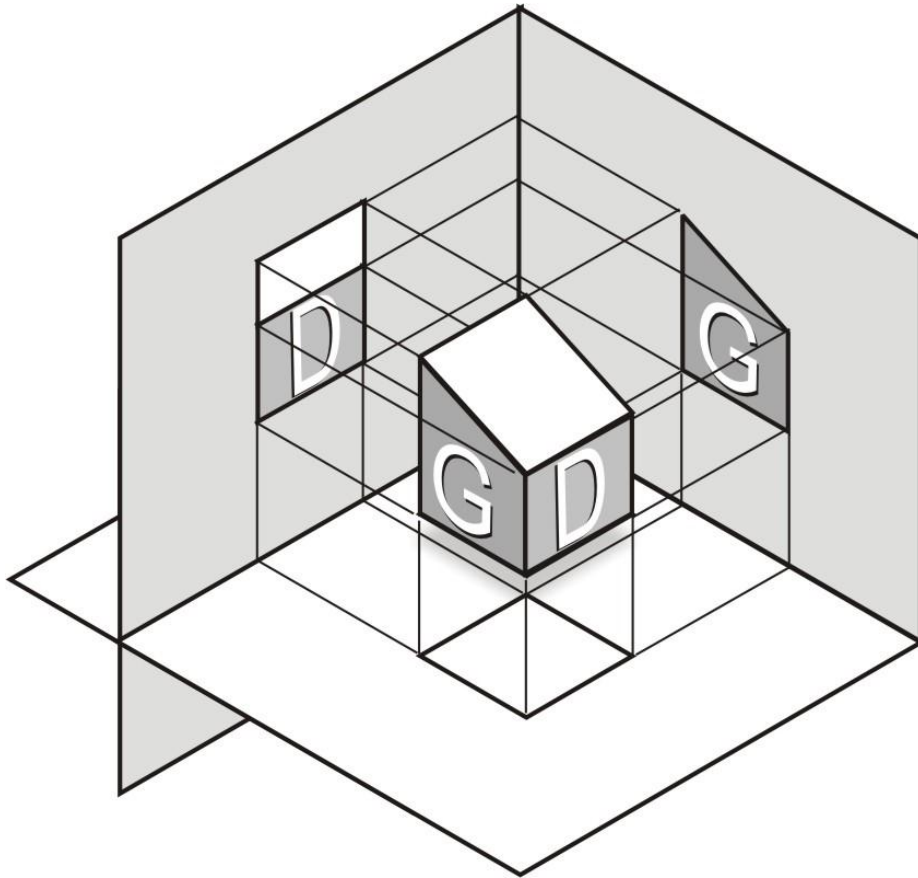




**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS AMBIENTAIS E DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL**

## **APOSTILA DE GEOMETRIA DESCRITIVA**



Dennis Coelho Cruz  
Luís Gustavo Henriques do Amaral

Barreiras, BA  
Novembro de 2012



## SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO.....	3
UNIDADE 1 – INTRODUÇÃO.....	4
1.1 HISTÓRICO .....	4
1.2 CONCEITOS BÁSICOS .....	4
1.3 SISTEMAS DE PROJEÇÃO.....	5
1.4 MÉTODO DA DUPLA PROJEÇÃO DE MONGE .....	7
UNIDADE 2 – ESTUDO DO PONTO.....	10
2.1 PROJEÇÕES DO PONTO.....	10
2.2 COORDENADAS DO PONTO .....	10
2.3 POSIÇÕES PARTICULARES DO PONTO .....	12
2.4 PONTOS NOS PLANOS BISSETORES .....	16
2.5 SIMETRIA DE PONTOS.....	17
2.5.1 Posições particulares de simetria .....	17
2.5.1.1 Pontos simétricos em relação aos planos de projeção .....	17
2.5.1.2 Pontos simétricos em relação aos planos bissetores .....	18
2.5.1.3 Pontos simétricos em relação à linha de terra .....	19
UNIDADE 3 – ESTUDO DA RETA.....	20
3.1 PROJEÇÕES .....	20
3.1.1 Segmentos de reta paralelos ao plano de projeção .....	20
3.1.2 Segmentos de reta perpendiculares ao plano de projeção .....	20
3.1.3 Segmentos de reta oblíquos ao plano de projeção.....	21
3.2 POSIÇÕES PARTICULARES DAS RETAS EM RELAÇÃO AOS PLANOS DE PROJEÇÃO .....	21
3.2.1 Reta Fronto-horizontal (ou Horizontal de Frente) .....	21
3.2.2 Reta de Topo.....	24
3.2.3 – Reta Vertical .....	25
3.2.4 Reta Horizontal ou Reta de Nível .....	27
3.2.5 Reta Frontal ou Reta de Frente .....	28
3.2.6 Reta de Perfil .....	30
3.2.7 Reta de Genérica ou Qualquer .....	31
3.3 PERTINÊNCIA DE PONTO E RETA .....	32
3.4 TRAÇOS DE RETAS.....	34
3.5 POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS .....	38
3.5.1 Retas concorrentes.....	38
3.5.2 Retas Paralelas.....	39
3.5.3 Posições Relativas de duas Retas de Perfil.....	40
3.5.3.1 Retas de Perfil situadas no mesmo plano de Perfil .....	40
3.5.3.2 Retas de Perfil situadas em planos de Perfil diferentes .....	41
UNIDADE 4 – ESTUDO DO PLANO .....	43
4.1 TRAÇOS DO PLANO .....	43
4.2 POSIÇÕES PARTICULARES .....	44
4.2.1 Plano Horizontal .....	44
4.2.2 Plano Frontal .....	44
4.2.3 Plano de Topo .....	44
4.2.4 Plano Vertical.....	45
4.2.5 Plano de Perfil.....	45
4.2.6 Plano de Rampa ou plano Paralelo à Linha de Terra.....	46
4.2.7 Plano que Passa pela Linha de Terra .....	46
4.2.8 Plano Qualquer .....	46
4.3 PERTINÊNCIA DE RETA E PLANO.....	47



4.3.1 Retas contidas nos planos .....	48
4.3.1.1 Retas de um plano Qualquer .....	48
4.3.1.2 Retas de um plano Horizontal .....	50
4.3.1.3 Retas de um plano Frontal .....	50
4.3.1.4 Retas de um plano de Topo .....	51
4.3.1.5 Retas de um plano Vertical.....	53
4.3.1.6 Retas de um plano de perfil.....	54
4.3.1.7 Retas de um plano de Rampa.....	55
4.3.1.8 Retas de um plano que Passa pela Linha de Terra .....	57
4.4 PERTINÊNCIA DE PONTO E PLANO .....	58
4.5 RETAS DE MÁXIMO DECLIVE E MÁXIMA INCLINAÇÃO .....	62
4.6 ELEMENTOS GEOMÉTRICOS QUE DEFINEM UM PLANO .....	65
4.6.1 Retas contidas em planos não definidos por seus traços .....	67
4.6.2 Planos definidos por suas retas de máximo declive ou de máxima inclinação .....	68
4.7 INTERSECÇÃO DE RETAS E PLANOS .....	71
4.7.1 Intersecção de planos.....	71
4.7.2 Intersecção de uma reta com um plano.....	76
4.8 PARALELISMO DE RETAS E PLANOS.....	77
4.8.1 Reta paralela a plano.....	77
4.8.2 Plano paralelo a reta.....	78
4.8.2.1 Plano paralelo a duas retas reversas .....	78
4.8.2.2 Plano paralelo a uma reta dada contendo outra reta dada .....	79
4.8.3 Plano paralelo a plano .....	79
4.9 PERPENDICULARISMO DE RETAS E PLANOS.....	82
4.9.1 Reta perpendicular a plano .....	82
4.9.2 Plano perpendicular a reta .....	84
4.9.3 Plano perpendicular a plano.....	85
4.9.3.1 Plano perpendicular a dois planos dados.....	86
4.9.4 Reta perpendicular a reta.....	88
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	91



## APRESENTAÇÃO

Esta apostila foi elaborada com o objetivo de servir de fonte de consulta complementar para os estudantes inscritos no componente curricular *IAD171 Geometria Descritiva*, dos cursos de graduação em Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia, Engenharia Civil, Engenharia Sanitária e Ambiental e Geologia do Instituto de Ciências Ambientais e Desenvolvimento Sustentável da Universidade Federal da Bahia.

A apostila foi criada com base em referências tradicionais e em publicações mais recentes, as quais são citadas no final do texto, buscando-se o seu enriquecimento com exemplos adequados ao conteúdo proposto no programa do componente curricular. Foram inseridos, quando possível, desenhos em perspectiva para facilitar o entendimento dos problemas resolvidos em *épura*. Além disso, para sistematizar a apresentação dos conteúdos foram incluídos quadros e tabelas com as informações mais importantes sobre cada assunto.

Como este material didático está em constante aperfeiçoamento, esperamos receber contribuições para o seu aprimoramento, de modo a facilitar o entendimento dos conteúdos abordados e estimular o estudo da Geometria Descritiva.

Os autores.

## UNIDADE 1 – INTRODUÇÃO

O desenvolvimento das tecnologias computacionais vem facilitando cada vez mais os processos de representação gráfica de objetos tridimensionais. Contudo, a capacidade de raciocínio do ser humano continua sendo a principal ferramenta para a interpretação e elaboração de desenhos técnicos e, mais do que isso, para a criação e transmissão de novas ideias.

Ainda que os recursos computacionais tragam inúmeros benefícios à execução de desenhos técnicos, tais como maior rapidez e precisão, a utilização desses recursos só é viável se o indivíduo possuir uma acurada visão espacial, sendo capaz de raciocinar em três dimensões. Ao contrário do que possa parecer, essa habilidade pode ser desenvolvida e aperfeiçoada. Uma das formas de fazê-lo é através do estudo da Geometria Descritiva.

Quando corretamente estudada, a Geometria Descritiva desenvolve não só a capacidade de leitura e interpretação de desenhos técnicos, mas também a habilidade de se imaginar objetos e projetos no espaço. Por esse motivo, o estudo da Geometria Descritiva é de fundamental importância em diversos ramos de atividade, tais como: Engenharia, Arquitetura, Geologia, Matemática, Desenho Industrial, Pintura, Escultura, etc.

### 1.1 HISTÓRICO

Os conceitos da Geometria Descritiva constituem a base do Desenho Técnico, onde se incluem o Desenho Arquitetônico, o Desenho Industrial, o Desenho Mecânico e o Desenho Topográfico. Ainda que esses conceitos já fossem abordados intuitivamente desde a antiguidade, as bases da Geometria Descritiva foram criadas no final do século XVIII pelo matemático francês Gaspard Monge.

De origem humilde, Monge destacou-se desde cedo devido às suas habilidades como desenhista e inventor. Frequentando a escola militar de Mézières, apresentou um método inovador para solucionar problemas relacionados à construção de fortificações, método que seria o alicerce da Geometria Descritiva que se conhece atualmente. Esse método foi mantido como segredo militar até o ano de 1794, quando Monge foi autorizado a publicá-lo, revolucionando a Engenharia Militar e o Desenho Técnico.



“Eu uso dois trunfos infalíveis:  
uma tenacidade invencível e mãos  
que traduzem meu pensamento  
com fidelidade geométrica”

Figura 1.1 – Gaspard Monge (1746-1818). Fonte: GASPARD MONGE (2011).

### 1.2 CONCEITOS BÁSICOS

A Geometria é um ramo da Matemática, e pode ser definida como a ciência que investiga as formas e as dimensões das figuras existentes na natureza. A Geometria Descritiva, por sua vez, é o ramo da Matemática Aplicada que tem como objetivo o estudo de objetos tridimensionais mediante projeções desses sólidos em planos.

Em Geometria, é comum utilizarmos os conceitos de *forma* e *dimensão*. Forma é o aspecto, ou configuração, de um determinado objeto (forma arredondada, elíptica, etc.), enquanto dimensão é a grandeza que caracteriza uma determinada medida desse objeto (largura, comprimento, etc.).

Os elementos fundamentais da geometria são o *ponto*, a *reta* e o *plano*. O ponto é o elemento mais simples, pois não possui forma nem dimensão. Contudo, a partir do ponto é possível obter-se qualquer

outra forma geométrica. Por exemplo, uma linha pode ser construída a partir do movimento de um ponto no espaço. Se o ponto mantiver sempre a mesma direção, sem desviar, dará origem a uma linha *reta* (Figura 1.2). Se, ao contrário, o ponto mudar constantemente de direção, dará origem a uma linha *curva* (Figura 1.3). Se, ainda, o ponto mudar bruscamente de direção de tempos em tempos, originará uma linha *poligonal* (Figura 1.4). Também podemos comparar uma linha a uma série de pontos enfileirados no espaço, unidos de tal forma que se confundem num traço contínuo. A linha constitui-se no elemento geométrico que possui apenas uma dimensão: o comprimento.



Figura 1.2



Figura 1.3



Figura 1.4

Uma *superfície*, por sua vez, pode ser definida como o conjunto das posições de uma linha móvel. Quando a superfície é concebida pelo conjunto das posições de uma linha reta que se desloca em trajetória retilínea e paralela a si mesma, é denominada de superfície plana ou *plano* (Figura 1.5). Quando a superfície é obtida pelo movimento de uma linha curva que se desloca no espaço, é chamada de superfície *curva* (Figura 1.6).

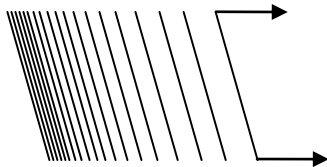


Figura 1.5

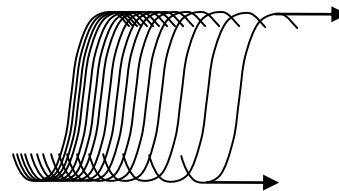


Figura 1.6

Uma reta não possui início nem fim, sendo ilimitada nos dois sentidos. Entretanto, se marcarmos sobre uma reta dois pontos A e B, o número infinito de pontos existentes entre A e B constitui um *segmento* de reta que tem A e B como extremos (Figura 1.7). Por outro lado, se marcarmos sobre uma reta um ponto O, a reta ficará dividida em duas partes chamadas *semi-retas* (Figura 1.8). Assim como as retas, os planos também se estendem ao infinito. E, da mesma forma que um ponto divide uma reta em duas semi-retas, uma reta divide um plano em dois semiplanos.

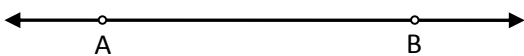


Figura 1.7

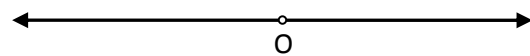


Figura 1.8

### 1.3 SISTEMAS DE PROJEÇÃO

Conforme o que foi exposto anteriormente, o estudo da Geometria Descritiva está baseado na *projeção* de objetos em planos. O conceito de projeção pode ser entendido com a utilização de exemplos do cotidiano, uma vez que se trata de um fenômeno físico que ocorre na natureza e que pode ser reproduzido pelo ser humano. Por exemplo, a sombra de um objeto nada mais é do que a projeção desse objeto sobre uma superfície, sob a ação de raios luminosos. Da mesma forma, as sucessivas imagens projetadas em uma tela de cinema são resultado da incidência de um feixe de luz sobre as imagens contidas em uma película.

Um sistema de projeção é constituído por cinco elementos: o objeto ou ponto objetivo, a projeção, o centro de projeção, as projetantes e o plano de projeção. Do centro de projeção partem as projetantes, que passam pelos pontos objetivo e interceptam o plano de projeção. Os pontos onde as projetantes interceptam o plano de projeção correspondem às projeções dos pontos objetivo.

Quando o centro de projeção está situado a uma distância finita do objeto, as projetantes são divergentes, dando origem à chamada projeção *cônica* ou *central* (Figura 1.9).

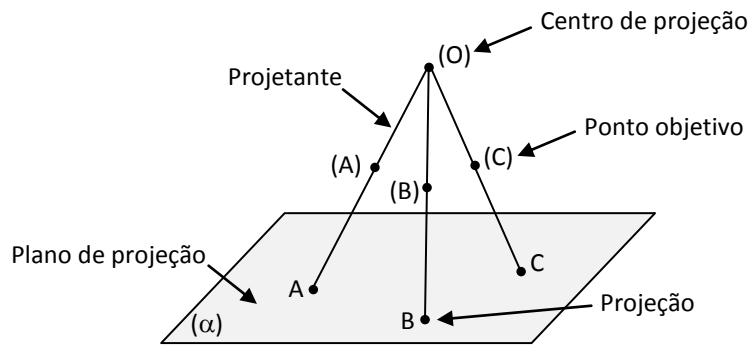


Figura 1.9 – Projeção cônica ou central

Ao contrário, quando o centro de projeção está localizado a uma distância infinita do objeto, as projetantes são paralelas entre si e, neste caso, tem-se a projeção *cilíndrica* ou *paralela* (Figura 1.10).

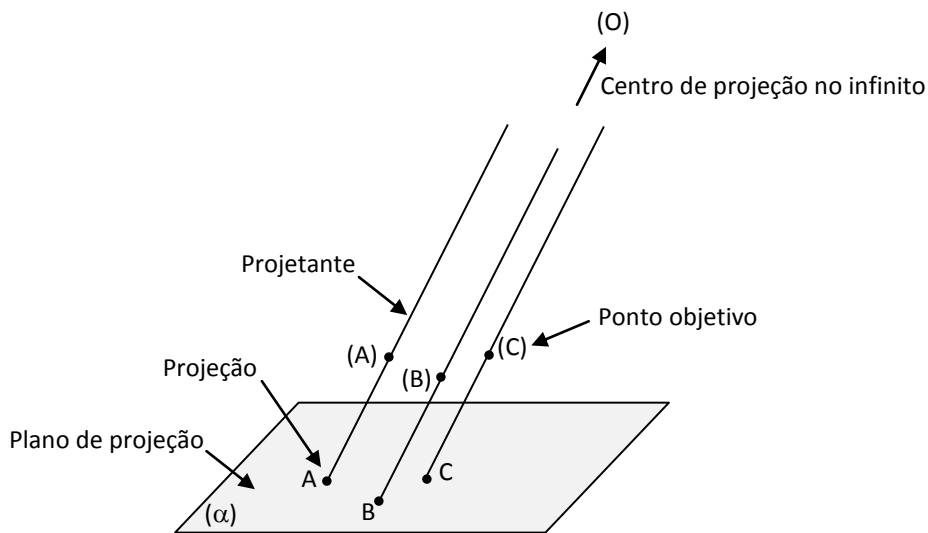


Figura 1.10 – Projeção cilíndrica ou paralela

Na Figura 1.10, a direção das projetantes é oblíqua ao plano de projeção e, nesse caso, a projeção cilíndrica é dita *oblíqua*. Por outro lado, quando a direção das projetantes é perpendicular ao plano de projeção, temos a projeção cilíndrica *ortogonal* (Figura 1.11).

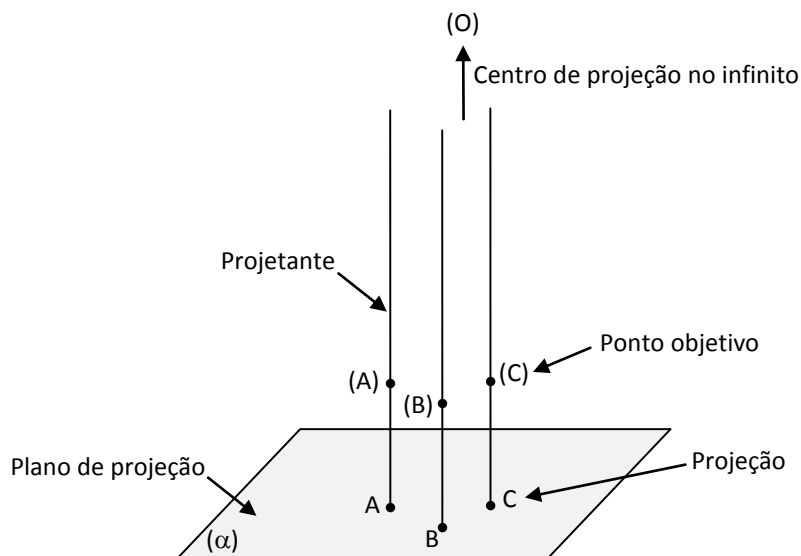
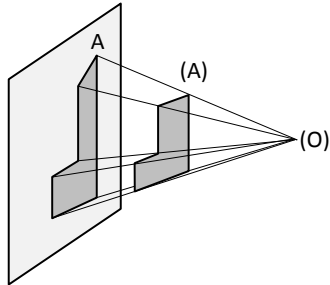


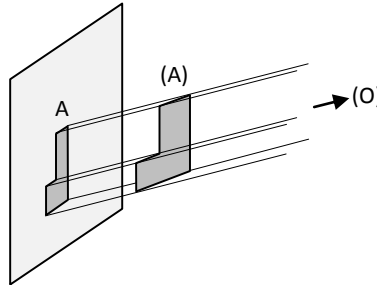
Figura 1.11 – Projeção cilíndrica ortogonal

Para que a forma e as dimensões de um objeto sejam compreendidas de modo satisfatório, é necessário que as dimensões da projeção correspondam às dimensões reais do objeto. Ou seja, o objeto deve ser representado em sua *verdadeira grandeza* (VG). Contudo, quando o objeto não é paralelo ao plano de projeção, ele não é projetado em VG em nenhum dos três sistemas de projeção apresentados (Figura 1.12).

Sistema de Projeções Cônicas



Sist. de Proj. Cilíndricas Oblíquas



Sist. de Proj. Cilíndricas Ortogonais

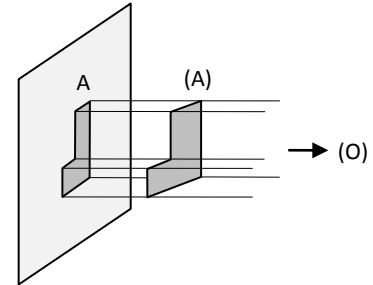


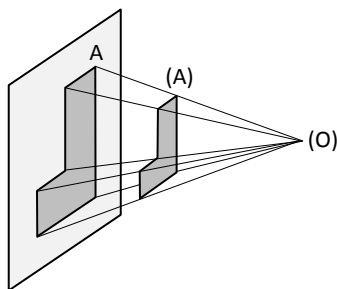
Figura 1.12 – Objetos oblíquos ao plano de projeção

Se, por outro lado, o objeto for paralelo ao plano de projeção, têm-se as seguintes situações:

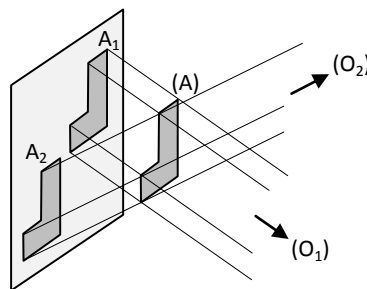
1. No Sistema de Projeções Cônicas, as dimensões da projeção não correspondem às dimensões reais do objeto (Figura 1.13(a)). Ou seja, o objeto não é representado em VG.

2. No Sistema de Projeções Cilíndricas Oblíquas, o objeto é representado em VG, mas como o ângulo das projetantes com o plano de projeção pode assumir qualquer valor, a projeção pode se localizar em muitas posições diferentes (Figura 1.13(b)).

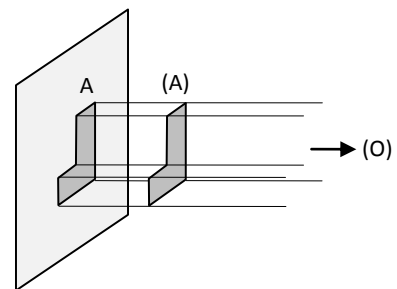
3. No Sistema de Projeções Cilíndricas Ortogonais, o objeto também é representado em VG e, além disso, há somente uma posição em que a projeção pode se localizar, uma vez que as projetantes só podem assumir uma direção (Figura 1.13(c)). Por esse motivo, o sistema mais utilizado em Geometria Descritiva e em Desenho Técnico é o Sistema de Projeções Cilíndricas Ortogonais.



(a)



(b)



(c)

Figura 1.13 – Objetos paralelos ao plano de projeção

#### 1.4 MÉTODO DA DUPLA PROJEÇÃO DE MONGE

Para se definir a forma e a posição de um objeto no espaço de forma satisfatória utilizando-se um sistema de projeções, uma só projeção não é suficiente. Assim, na Geometria Descritiva clássica, são utilizados dois planos de projeção para se representar um objeto, sendo que o sistema de projeção adotado é o Sistema de Projeções Cilíndricas Ortogonais.

O método da dupla projeção de Monge, no qual toda a Geometria Descritiva clássica está baseada, consiste em se determinar duas projeções ortogonais do objeto sobre dois planos perpendiculares entre si, o *plano horizontal de projeção* ( $\pi$ ) e o *plano vertical de projeção* ( $\pi'$ ). Esses dois planos dividem o espaço em quatro regiões, denominadas *diedros*, e se interceptam segundo uma linha chamada *linha de terra* (Figura 1.14). Os dois planos de projeção definem, ainda, quatro semiplanos: horizontal anterior ( $\pi_A$ ), horizontal posterior ( $\pi_P$ ), vertical superior ( $\pi'_S$ ) e vertical inferior ( $\pi'_I$ ) (Figura 1.15).



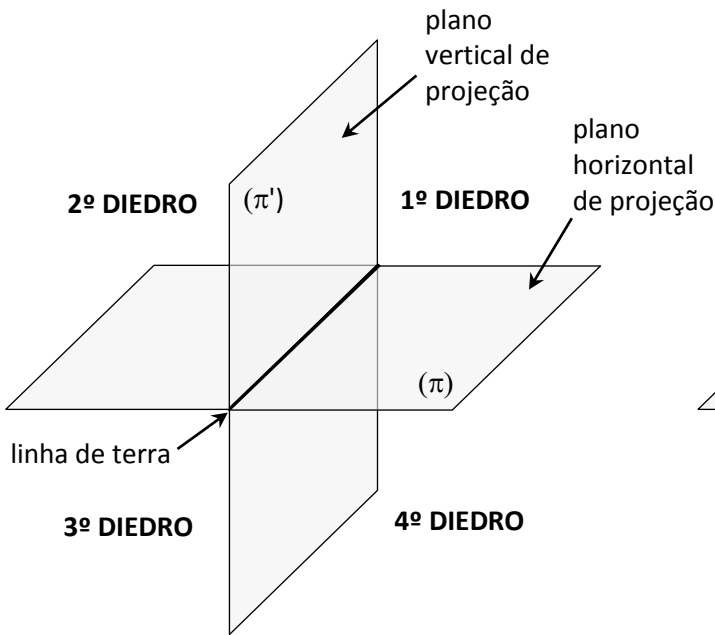


Figura 1.14 – Planos de projeção perpendiculares

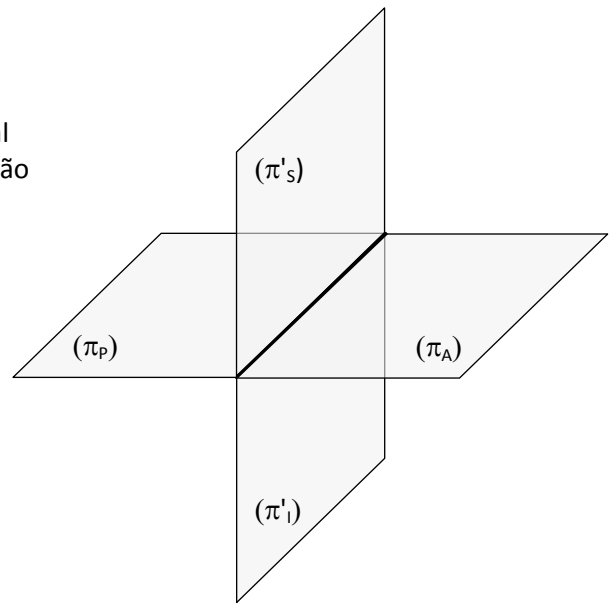


Figura 1.15 – Semiplanos

Qualquer objeto, quando representado no sistema mongeano, possuirá duas projeções, uma no plano horizontal de projeção e outra no plano vertical de projeção (Figura 1.16). A projeção do objeto sobre o plano  $(\pi)$  é chamada de *projeção horizontal* e a projeção sobre o plano  $(\pi')$  é denominada *projeção vertical*. Por convenção, considera-se que o centro de projeção que dá origem à projeção horizontal está localizado acima do plano horizontal  $(\pi)$ , a uma distância infinita, enquanto o relativo à projeção vertical está localizado na frente do plano vertical  $(\pi')$ , também a uma distância infinita.

Rebatendo-se o plano horizontal  $(\pi)$  sobre o vertical  $(\pi')$ , ou vice-versa, é possível representar uma figura do espaço tridimensional em um único plano. Assim, pode-se rebater o plano  $(\pi)$  sobre o plano  $(\pi')$ , girando de  $90^\circ$  o plano  $(\pi)$  em torno da linha de terra, no sentido horário, fazendo com que os dois planos de projeção fiquem em coincidência, obtendo-se o que se chama de *épura* (Figura 1.17). A épura possibilita, portanto, a representação de um objeto tridimensional em um espaço bidimensional, a folha de papel, tornando possível a resolução de inúmeros problemas geométricos.

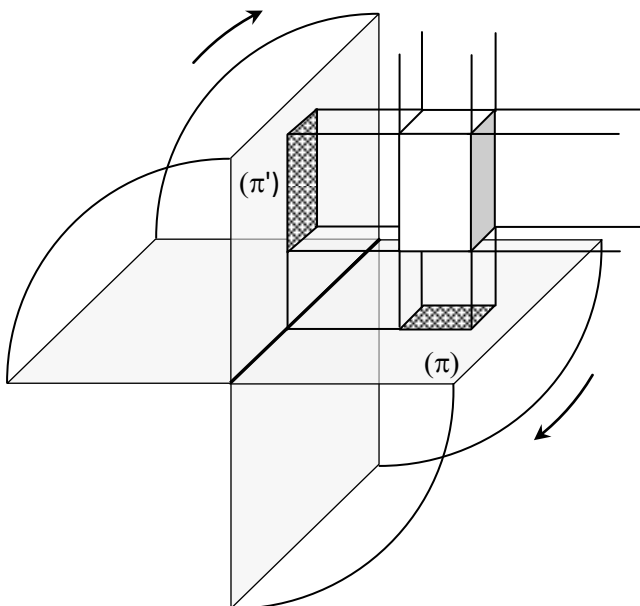


Figura 1.16 – Projeções ortogonais do objeto

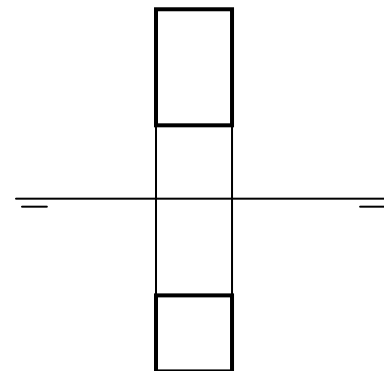


Figura 1.17 – Épura do objeto



## ATIVIDADE PRÁTICA 01

Na representação dos elementos (pontos, projeções, etc.) apresentados nos exercícios a seguir, utilizar o sistema cartesiano, definindo o canto inferior esquerdo da folha de papel milimetrado como a origem dos eixos cartesianos e posicionando os elementos conforme as coordenadas informadas em cada exercício.

01) Sabendo-se que o triângulo (A)(B)(C) é paralelo ao plano ( $\alpha$ ) de projeção, completar a projeção deste triângulo sobre o referido plano. Posteriormente, identificar o sistema de projeção utilizado. Dados:

(O): ( 155 , 70 )	Vértice inferior esquerdo do plano ( $\alpha$ ): ( 5 , 5 )
(A): ( 110 , 113 )	Vértice inferior direito do plano ( $\alpha$ ): ( 95 , 55 )
(B): ( 125 , 85 )	Vértice superior esquerdo do plano ( $\alpha$ ): ( 5 , 155 )
(C): ( 100 , 80 )	Vértice superior direito do plano ( $\alpha$ ): ( 95 , 205 )
A: ( 50 , 170 )	

02) Sabendo-se que o hexágono (D)(E)(F)(G)(H)(I) é paralelo ao plano ( $\beta$ ) de projeção e que o centro de projeções é impróprio (está localizado no infinito), completar a projeção deste hexágono sobre o referido plano. Em seguida, identificar o sistema de projeção utilizado. Dados:

(D): ( 120 , 95 )	D: ( 40 , 150 )
(E): ( 150 , 85 )	Vértice inferior esquerdo do plano ( $\beta$ ): ( 5 , 5 )
(F): ( 150 , 55 )	Vértice inferior direito do plano ( $\beta$ ): ( 95 , 55 )
(G): ( 130 , 35 )	Vértice superior esquerdo do plano ( $\beta$ ): ( 5 , 155 )
(H): ( 100 , 45 )	Vértice superior direito do plano ( $\beta$ ): ( 95 , 205 )
(I): ( 100 , 75 )	

03) Determinar a posição do triângulo (J)(K)(L) no espaço, conhecendo-se as suas projeções nos planos horizontal ( $\pi$ ) e vertical ( $\pi'$ ) de projeção e sabendo-se que o sistema de projeção utilizado é o Sistema de Projeções Cilíndricas Ortogonais. Dados:

J: ( 85 , 25 )	Vértice inferior esquerdo do plano ( $\pi$ ): ( 5 , 5 )
K: ( 110 , 65 )	Vértice inferior direito do plano ( $\pi$ ): ( 105 , 5 )
L: ( 120 , 55 )	Vértice superior esquerdo do plano ( $\pi$ ): ( 75 , 75 )
J': ( 25 , 120 )	Vértice superior direito do plano ( $\pi$ ): ( 175 , 75 )
K': ( 65 , 145 )	Vértice inferior esquerdo do plano ( $\pi'$ ): ( 5 , 5 )
L': ( 55 , 90 )	Vértice inferior direito do plano ( $\pi'$ ): ( 75 , 75 )
	Vértice superior esquerdo do plano ( $\pi'$ ): ( 5 , 105 )
	Vértice superior direito do plano ( $\pi'$ ): ( 75 , 175 )

04) Determinar as projeções do sólido (M)(N)(P)(Q)(R)(S)(T)(U)(V)(W)(X)(Y), conhecendo-se as projeções de um dos seus vértices e sabendo-se que o sistema de projeção utilizado é o Sistema de Projeções Cilíndricas Ortogonais. Dados:

(M): ( 120 , 95 )	P: ( 150 , 70 )
(N): ( 150 , 125 )	P': ( 70 , 160 )
(P): ( 150 , 160 )	Vértice inferior esquerdo do plano ( $\pi$ ): ( 5 , 5 )
(Q): ( 135 , 145 )	Vértice inferior direito do plano ( $\pi$ ): ( 105 , 5 )
(R): ( 135 , 135 )	Vértice superior esquerdo do plano ( $\pi$ ): ( 75 , 75 )
(S): ( 120 , 120 )	Vértice superior direito do plano ( $\pi$ ): ( 175 , 75 )
(T): ( 105 , 95 )	Vértice inferior esquerdo do plano ( $\pi'$ ): ( 5 , 5 )
(U): ( 135 , 125 )	Vértice inferior direito do plano ( $\pi'$ ): ( 75 , 75 )
(V): ( 135 , 160 )	Vértice superior esquerdo do plano ( $\pi'$ ): ( 5 , 105 )
(W): ( 120 , 145 )	Vértice superior direito do plano ( $\pi'$ ): ( 75 , 175 )
(X): ( 120 , 135 )	
(Y): ( 105 , 120 )	

## UNIDADE 2 – ESTUDO DO PONTO

### 2.1 PROJEÇÕES DO PONTO

No sistema mongeano, um ponto possuirá sempre duas projeções: a horizontal e a vertical. Conhecendo-se essas projeções, é possível determinar a posição do ponto no espaço. Por convenção, de modo a facilitar o estudo, todo ponto situado no espaço deve ser designado por uma letra maiúscula entre parênteses. Já as projeções desse ponto, situadas sobre os respectivos planos de projeção, devem ser designadas pela mesma letra maiúscula, porém sem parênteses, e a projeção vertical deve ser seguida por um apóstrofo (Figura 2.1).

Procedendo-se ao rebatimento do plano horizontal sobre o vertical, obtém-se a *épura* do ponto (Figura 2.2). Na *épura*, as duas projeções de um ponto devem estar ligadas por uma linha denominada *linha de chamada*, que deverá ser sempre perpendicular à linha de terra.

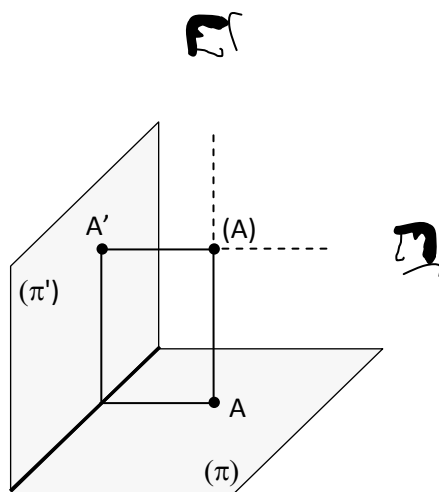


Figura 2.1 – Projeções do ponto (A)

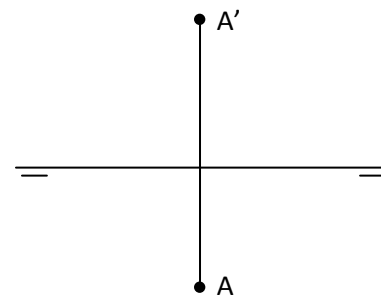


Figura 2.2 – Épura do ponto (A)

### 2.2 COORDENADAS DO PONTO

A distância de um determinado ponto a cada um dos planos de projeção recebe um nome característico: a distância de um ponto ao plano vertical de projeção é denominada *afastamento*, enquanto a distância deste ponto ao plano horizontal de projeção é chamada de *cota*. O afastamento é positivo quando o ponto está na frente do plano vertical de projeção e negativo quando o ponto está atrás deste plano. A cota é positiva quando o ponto situa-se acima do plano horizontal de projeção e negativa quando o ponto está abaixo deste plano.

O conhecimento da cota e do afastamento de um ponto não é suficiente para que um ponto seja individualizado. Como se trata de um sistema tridimensional, é necessário incluir mais uma coordenada para que a posição do ponto fique bem definida. Assim, inclui-se uma terceira coordenada, a *abscissa*, tomada sobre a linha de terra a partir de um ponto “O”, considerado origem, e marcado arbitrariamente sobre esta linha (Figura 2.3). À direita deste ponto, a abscissa é positiva; à esquerda, é negativa.

Em *épura*, se o afastamento for positivo, a projeção horizontal do ponto estará abaixo da linha de terra e, se for negativo, esta projeção estará acima da linha de terra. Por outro lado, quando a cota for positiva, a projeção vertical do ponto estará acima da linha de terra e, se for negativa, estará abaixo da linha de terra. Ainda com relação à *épura*, se o ponto estiver à direita da origem, a abscissa será positiva, e se o ponto estiver à esquerda da origem, a abscissa será negativa. Na Figura 2.4, tem-se a *épura* correspondente ao ponto representado na Figura 2.3, na qual se percebe que o ponto possui abscissa, afastamento e cota positivos.

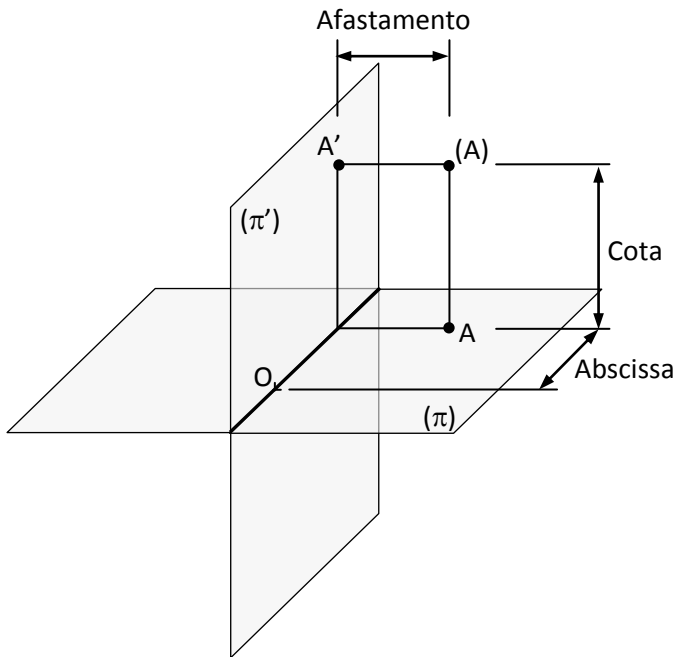


Figura 2.3 – Coordenadas do ponto

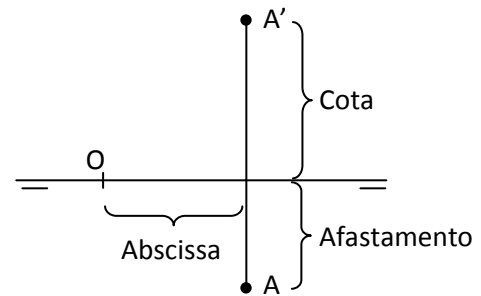
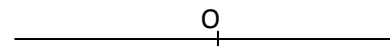
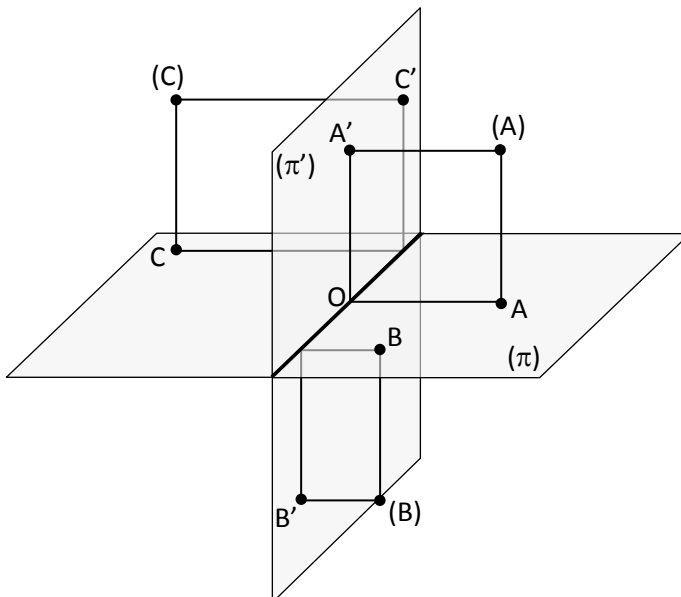


Figura 2.4 –Épura correspondente

As três coordenadas descritas constituem as chamadas *coordenadas descritivas do ponto*, e são apresentadas sempre em ordem alfabética: abscissa (x), afastamento (y) e cota (z). Assim, para um determinado ponto (P), a indicação das coordenadas é feita da seguinte maneira: (P)[ x ; y ; z ].

**Exemplos:**

1) representar os pontos (A), (B) e (C) na épura abaixo, conhecendo-se as suas coordenadas (em mm) e a sua posição no espaço. Dados: (A)[ 0 ; 20 ; 20 ], (B)[ -10 ; 10 ; -20 ] e (C)[ 10 ; -30 ; 20 ].



2) representar os pontos (D), (E) e (F) na épura abaixo e informar a sua posição no espaço. Dados: (D)[ 10 ; 20 ; 10 ], (E)[ 20 ; -10 ; 20 ], (F)[ -10 ; 30 ; -20 ] e (G) [ 10 ; 0 ; 20 ].



### 2.3 POSIÇÕES PARTICULARES DO PONTO

No sistema mongeano, um ponto pode ocupar nove diferentes posições em relação aos planos de projeção. Como a posição do ponto é definida pelas suas coordenadas, a partir delas é possível definir em que lugar do espaço o ponto está localizado.

Ainda que o valor da abscissa influa na posição do ponto no espaço, ele não influi na posição do ponto em relação aos dois planos de projeção. Como pode ser visto no Quadro 2.1, o afastamento e a cota são as coordenadas que determinam a posição do ponto em relação aos planos de projeção.

Quadro 2.1 – Posições assumidas pelo ponto em função das suas coordenadas

Coordenada	Posição em relação aos planos de projeção								
	1°D	2°D	3°D	4°D	$(\pi_A)$	$(\pi_p)$	$(\pi'_s)$	$(\pi'_l)$	L.T.
Afastamento	+	-	-	+	+	-	0	0	0
Cota	+	+	-	-	0	0	+	-	0

No quadro a seguir são apresentadas as perspectivas e as épuras correspondentes a cada um dos nove casos possíveis.

Quadro 2.2 – Posições particulares do ponto

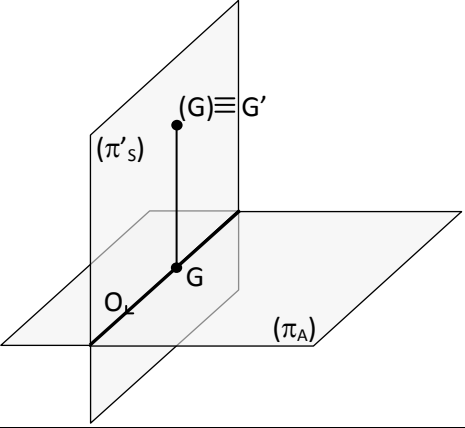
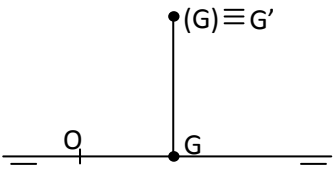
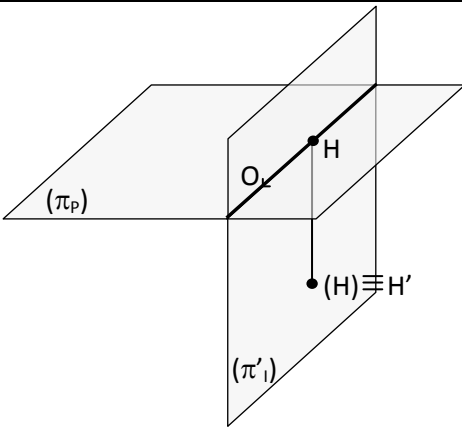
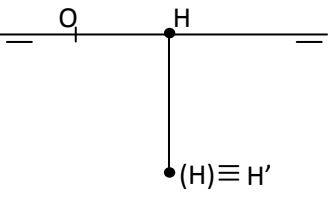
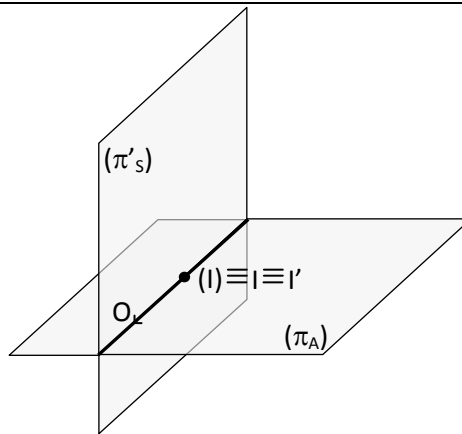
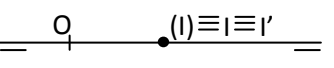
<p>1. Ponto no 1° Diedro (afastamento e cota positivos):</p>	
<p>2. Ponto no 2° Diedro (afastamento negativo e cota positiva):</p>	

Quadro 2.2 – Continuação

<p>3. Ponto no 3º Diedro (afastamento e cota negativos):</p>		
<p>4. Ponto no 4º Diedro (afastamento positivo e cota negativa):</p>		
<p>5. Ponto no semiplano horizontal anterior (afastamento positivo e cota nula):</p>		
<p>6. Ponto no semiplano horizontal posterior (afastamento negativo e cota nula):</p>		

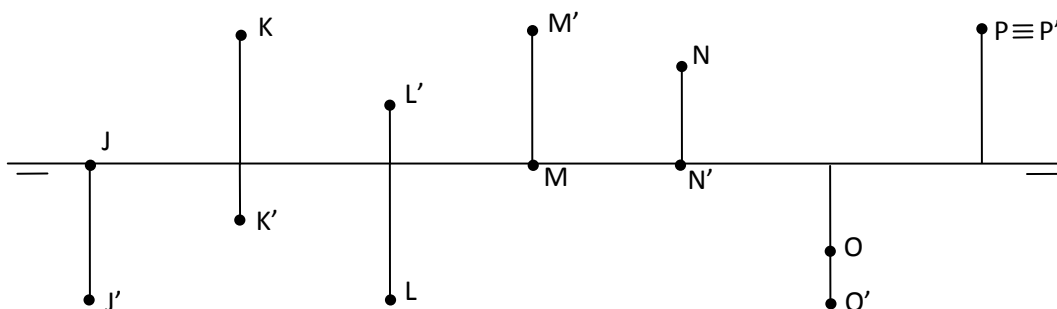


Quadro 2.2 – Continuação

<p>7. Ponto no semiplano vertical superior (afastamento nulo e cota positiva):</p>	 
<p>8. Ponto no semiplano vertical inferior (afastamento nulo e cota negativa):</p>	 
<p>9. Ponto na linha de terra (afastamento e cota nulos):</p>	 

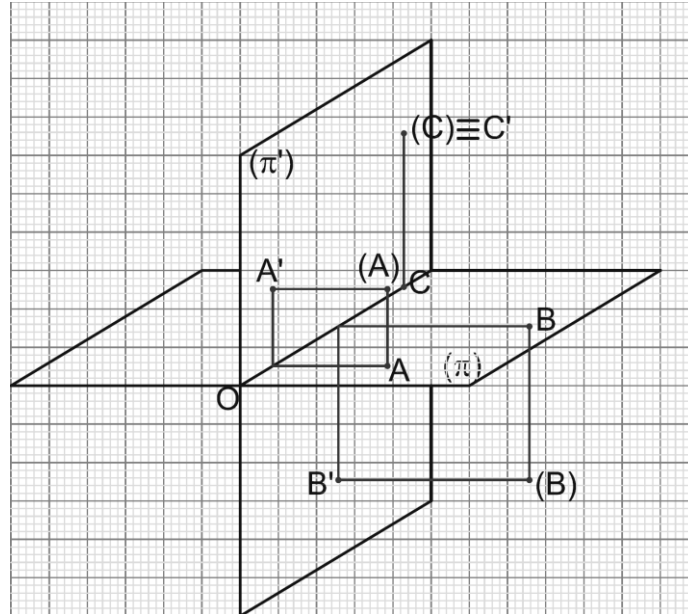
**Exemplo:**

1) Indicar as posições dos pontos (J), (K), (L), (M), (N), (O) e (P) em relação aos planos de projeção, conhecendo-se as suas projeções dadas na é pura abaixo:

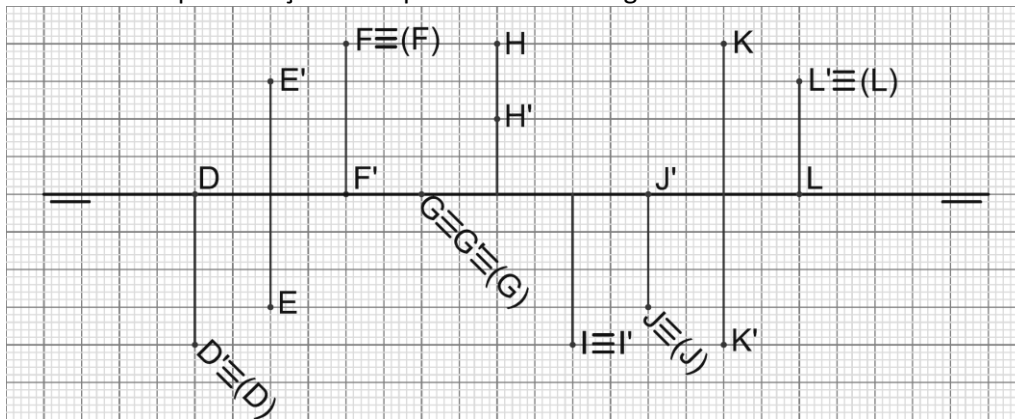


ATIVIDADE PRÁTICA 02

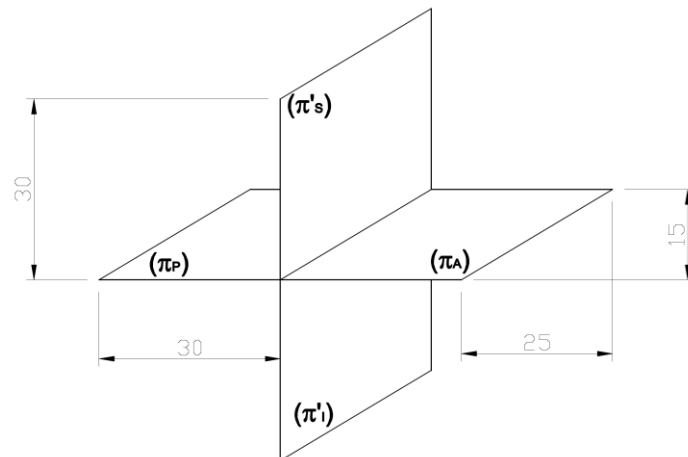
01) Representar uma épora com os pontos (A), (B) e (C), conhecendo-se as suas posições no espaço conforme a figura abaixo:



02) Representar os pontos (D), (E), (F), (G), (H), (I), (J), (K) e (L) no espaço e informar a sua posição, conhecendo-se as suas representações em épora conforme a figura abaixo:



Na resolução do Exercício 02, representar cada ponto em um desenho separado, desenhando-se os planos de projeção em perspectiva com as seguintes dimensões:





## 2.4 PONTOS NOS PLANOS BISSETORES

Plano bissetor é um plano que passa pela linha de terra e forma  $45^\circ$  com os planos de projeção, dividindo o diedro em duas regiões iguais. Há dois planos bissetores, conforme apresentado na Figura 2.5. O *Plano Bissetor Ímpar* ( $\beta_i$ ) ou *Primeiro Bissetor* ( $\beta_{13}$ ) atravessa os diedros ímpares ( $1^\circ$  e  $3^\circ$ ), enquanto o *Plano Bissetor Par* ( $\beta_p$ ) ou *Segundo Bissetor* ( $\beta_{24}$ ) atravessa os diedros pares ( $2^\circ$  e  $4^\circ$ ).

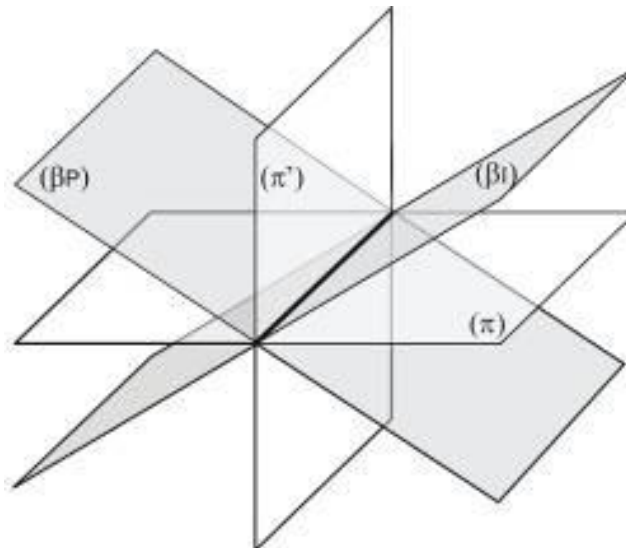


Figura 2.5 – Planos bissetores

Os pontos situados nos planos bissetores têm a característica principal de serem equidistantes dos planos de projeção, o que pode ser explicado pelo ângulo de  $45^\circ$  formado entre o bissetor e os planos de projeção (Figura 2.6).

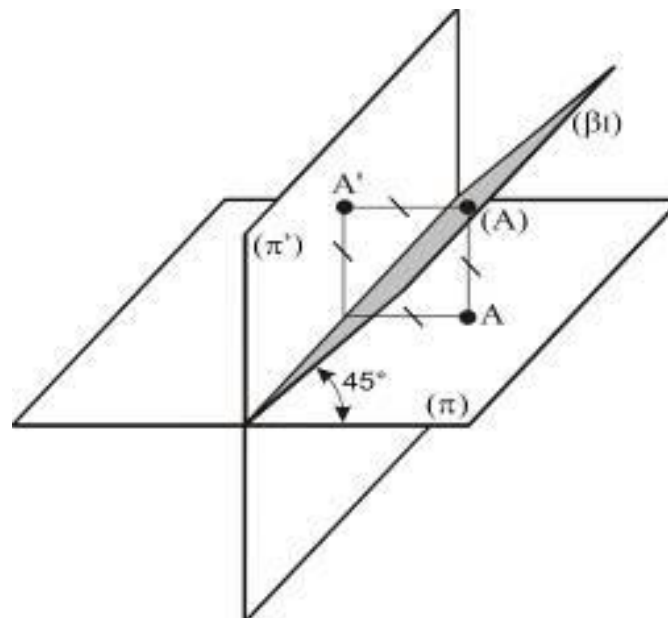


Figura 2.6 – Ponto (A) situado no plano bissetor ímpar e suas projeções.

Os sinais do afastamento e da cota de um ponto situado em um plano bissetor dependem da posição do ponto em relação aos planos de projeção, conforme apresentado no Quadro 2.2. Na Figura 2.7 tem-se a representação em épura de quatro pontos localizados nos planos bissetores: (A)  $[-40 ; 20 ; 20]$ , (B)  $[-20 ; -20 ; -20]$ , (C)  $[20 ; 20 ; -20]$  e (D)  $[40 ; -20 ; 20]$ .

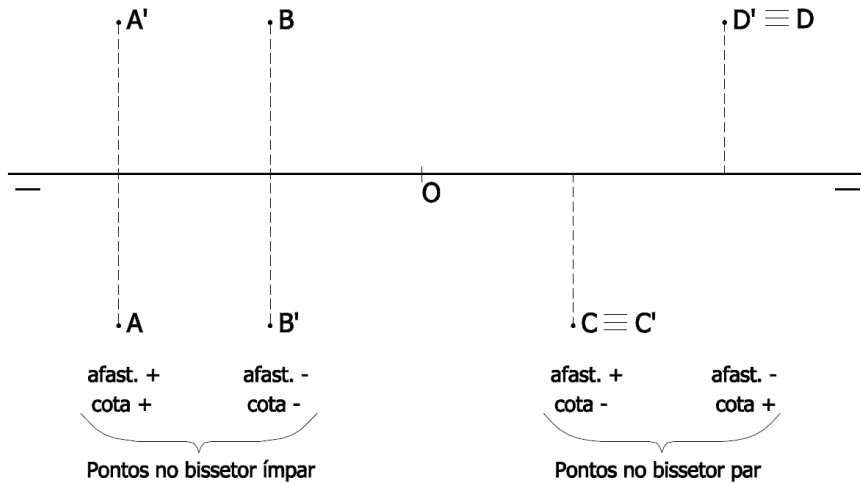


Figura 2.7 – Cota e afastamento de pontos situados nos planos bissetores

Pela Figura 2.7 percebe-se que, em *épura*, um ponto situado no Plano Bissetor Ímpar tem projeções simétricas em relação à linha de terra, enquanto um ponto situado no Plano Bissetor Par tem projeções coincidentes.

### 2.5 SIMETRIA DE PONTOS

Para que dois pontos sejam simétricos em relação a um plano, este deve ser o mediador do segmento de reta formado pelos dois pontos. Em outras palavras, dois pontos são simétricos em relação a um plano quando o plano é perpendicular ao segmento formado por esses dois pontos e contém o seu ponto médio (Figura 2.8).

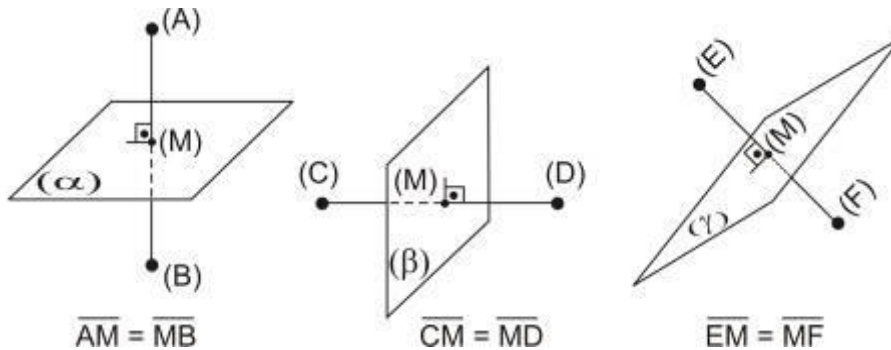


Figura 2.8 – Simetria de dois pontos em relação a três planos dados

Dois pontos são simétricos em relação a uma reta quando a reta é perpendicular ao segmento formado pelos dois pontos e contém o ponto médio deste segmento.

#### 2.5.1 Posições particulares de simetria

##### 2.5.1.1 Pontos simétricos em relação aos planos de projeção

Quando dois pontos são simétricos em relação ao plano horizontal de projeção, possuem a mesma abscissa, afastamentos iguais em grandeza e sentido e cotas de mesma grandeza e sentidos contrários (Figura 2.9).

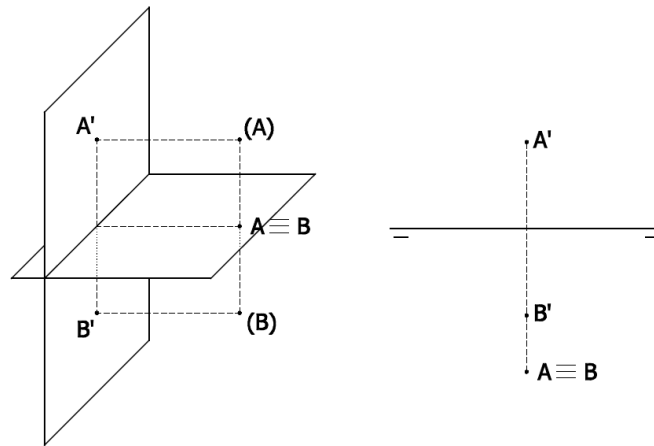


Figura 2.9 – Pontos simétricos em relação ao plano ( $\pi$ )

Quando dois pontos são simétricos em relação ao plano vertical de projeção, possuem a mesma abscissa, cotas iguais em grandeza e sentido e afastamentos de mesma grandeza e sentidos contrários (Figura 2.10).

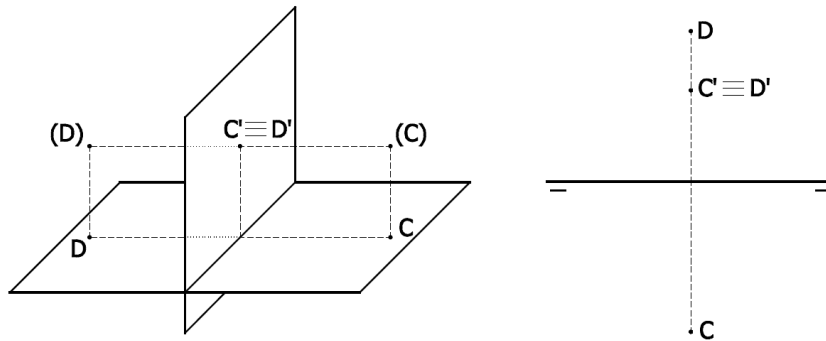


Figura 2.10 – Pontos simétricos em relação ao plano ( $\pi'$ )

### 2.5.1.2 Pontos simétricos em relação aos planos bissetores

Quando dois pontos são simétricos em relação ao plano bissetor ímpar, possuem a mesma abscissa e a cota de um ponto é igual ao afastamento do outro em grandeza e sentido. Nesse caso, as projeções de nomes contrários dos dois pontos são simétricas em relação à linha de terra (Figura 2.11).

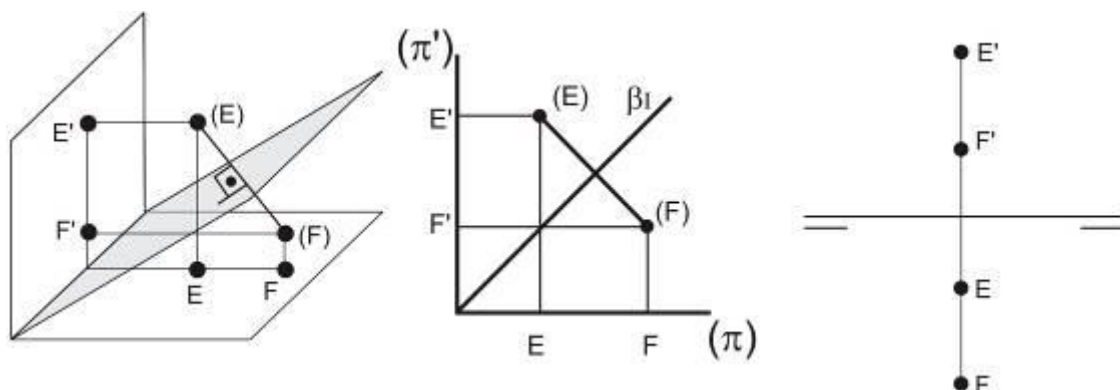


Figura 2.11 – Simetria de pontos em relação ao Plano Bissetor Ímpar

Quando dois pontos são simétricos em relação ao plano bissetor par, possuem a mesma abscissa e a cota de um ponto é igual ao afastamento do outro com sinal contrário. Nesse caso, as projeções de nomes contrários dos dois pontos são coincidentes (Figura 2.12).

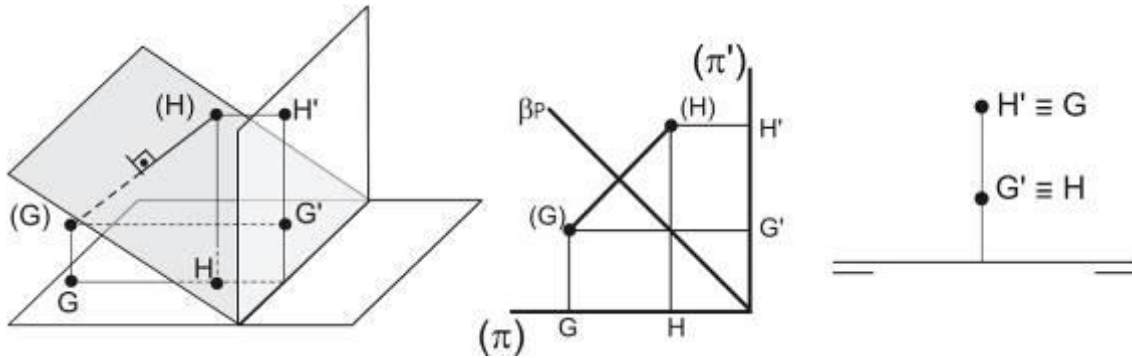


Figura 2.12 – Simetria de pontos em relação ao Plano Bissetor Par

### 2.5.1.3 Pontos simétricos em relação à linha de terra

Quando dois pontos são simétricos em relação à linha de terra, possuem a mesma abscissa e cotas e afastamentos iguais em grandeza, mas de sentidos contrários. Nesse caso, as projeções de mesmo nome são simétricas em relação à linha de terra (Figura 2.13).

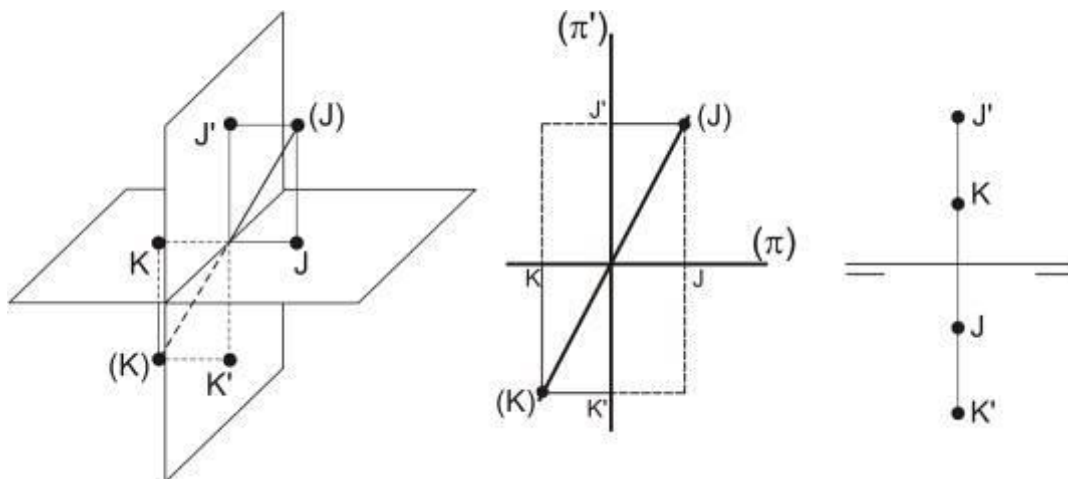


Figura 2.13 – Simetria de pontos em relação à linha de terra

## ATIVIDADE PRÁTICA 03

- 01) Representar em écura o ponto (A), situado no 1° bissetor, e o ponto (B), situado no 2° bissetor. Dados: (A) [ -10 ; 15 ; ? ] e (B) [ 10 ; ? ; 20 ].
- 02) Representar em écura o ponto (C), simétrico do ponto (D) em relação ao plano ( $\pi$ ), e o ponto (E), simétrico do ponto (F) em relação ao plano ( $\pi'$ ). Dados: (D) [ 0 ; 10 ; 20 ] e (F) [ 15 ; -30 ; 15 ].
- 03) Representar em écura o ponto (G), simétrico do ponto (H) em relação ao 1° bissetor, e o ponto (I), simétrico do ponto (J) em relação ao 2° bissetor. Dados: (H) [ 10 ; 10 ; 15 ] e (J) [ 20 ; -10 ; 20 ].
- 04) Representar em écura o ponto (K), simétrico do ponto (L) em relação à linha de terra, e o ponto (M), simétrico do ponto (N) em relação a essa mesma linha. Dados: (L) [ 0 ; -15 ; 25 ] e (N) [ 25 ; 20 ; 0 ].
- 05) Determinar as coordenadas de um ponto (P), simétrico de (Q) em relação ao plano bissetor ímpar, sabendo-se que o ponto (Q) é simétrico de (R) em relação à linha de terra e (R) é simétrico de (S) em relação ao plano horizontal de projeção. Dados: (S) [ 10 ; -25 ; -5 ].

## UNIDADE 3 – ESTUDO DA RETA

### 3.1 PROJEÇÕES

O estudo da reta será baseado no conceito apresentado na seção 1.2, admitindo-se que uma reta é formada por um conjunto de pontos consecutivos (ver Figura 1.2). A projeção de um segmento de reta sobre um plano é o lugar das projeções dos infinitos pontos que compõe esse segmento sobre o plano (Figura 3.1).

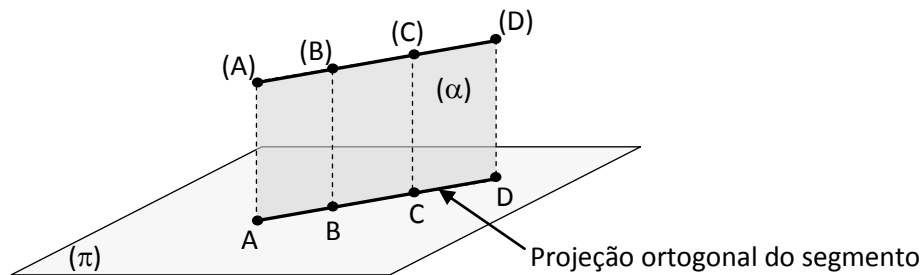


Figura 3.1 – Projeção do segmento de reta (A)(D) sobre o plano ( $\pi$ ).

Na Figura 3.1, AD é a projeção ortogonal do segmento (A)(D) sobre o plano ( $\pi$ ). O plano ( $\alpha$ ), formado pelas projetantes dos infinitos pontos da reta que contém o segmento (A)(D), é chamado de plano projetante da reta. Como a projeção foi gerada no sistema de Projeções Cilíndricas Ortogonais, o plano ( $\alpha$ ) é perpendicular ao plano ( $\pi$ ) de projeção.

#### 3.1.1 Segmentos de reta paralelos ao plano de projeção

Todo segmento de reta paralelo a um plano apresentará projeções com dimensões idênticas às reais, ou seja, será projetado em *verdadeira grandeza*, qualquer que seja a posição do plano (Figura 3.2).

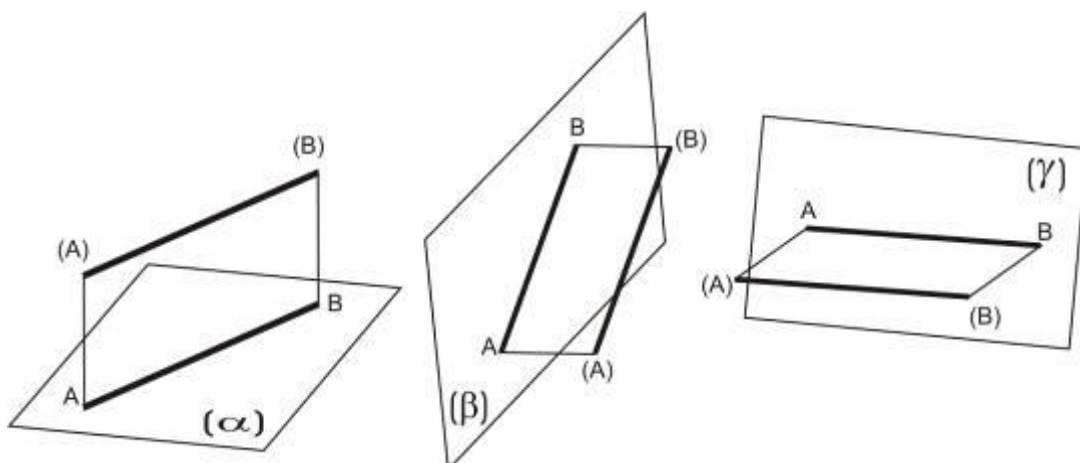


Figura 3.2 – Segmentos de reta paralelos aos planos de projeção

#### 3.1.2 Segmentos de reta perpendiculares ao plano de projeção

Todo segmento de reta perpendicular a um plano apresentará projeções na forma de um ponto, qualquer que seja a posição do plano (Figura 3.3).

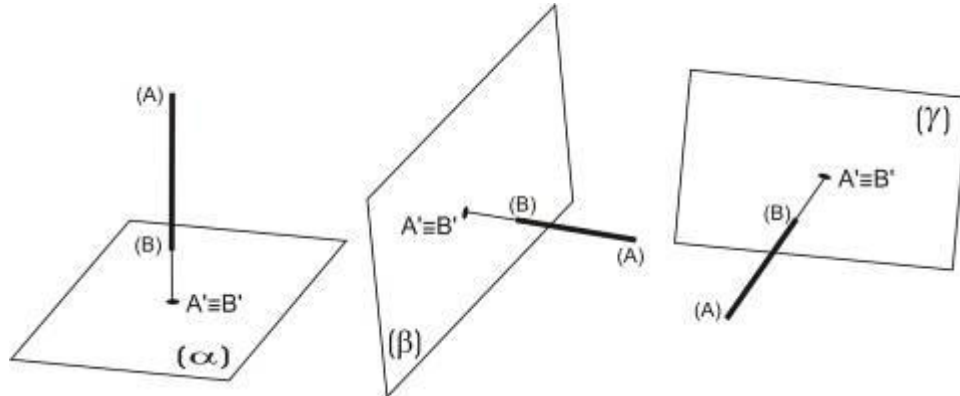


Figura 3.3 – Segmentos de reta perpendiculares aos planos de projeção

### 3.1.3 Segmentos de reta oblíquos ao plano de projeção

Todo segmento de reta oblíquo a um plano apresentará projeções deformadas, tanto em relação à sua medida linear quanto em relação ao seu ângulo, qualquer que seja a posição do plano (Figura 3.4).

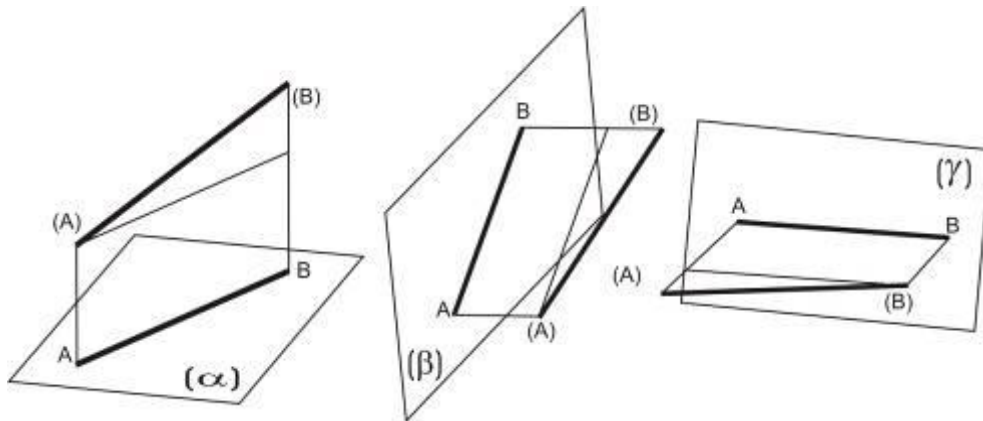


Figura 3.4 – Segmentos de reta oblíquos aos planos de projeção

## 3.2 POSIÇÕES PARTICULARES DAS RETAS EM RELAÇÃO AOS PLANOS DE PROJEÇÃO

### 3.2.1 Retas Fronto-horizontal (ou Horizontal de Frente)

A reta Fronto-horizontal caracteriza-se por ser paralela aos dois planos de projeção,  $(\pi)$  e  $(\pi')$ , e por possuir pontos com afastamento e cota constantes. Em é pura, as suas duas projeções são paralelas à linha de terra e aparecem em verdadeira grandeza (Figura 3.5).

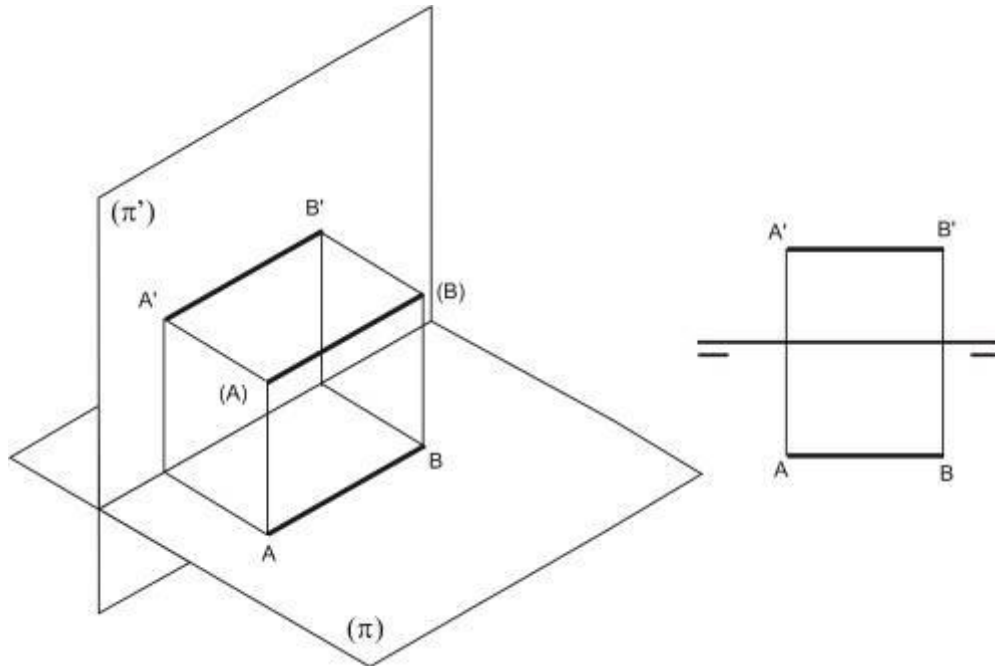


Figura 3.5 – Reta Fronto-horizontal

A reta Fronto-horizontal pode estar localizada em nove diferentes posições em relação aos planos de projeção, conforme o Quadro 3.1.

Quadro 3.1 – Posições particulares da reta Fronto-horizontal

<p>1. Segmento no 1º Diedro (afastamento e cota positivos):</p>	
<p>2. Segmento no 2º Diedro (afastamento negativo e cota positiva):</p>	
<p>3. Segmento no 3º Diedro (afastamento negativo e cota negativa):</p>	



Quadro 3.1 – Continuação

4. Segmento no 4º Diedro (afastamento positivo e cota negativa):	
5. Segmento no $(\pi_A)$ (afastamento positivo e cota nula):	
6. Segmento no $(\pi_p)$ (afastamento negativo e cota nula):	
7. Segmento no $(\pi'_s)$ (afastamento nulo e cota positiva):	
8. Segmento no $(\pi'_i)$ (afastamento nulo e cota negativa):	
9. Segmento na linha terra (afastamento e cota nulos):	



### 3.2.2 Reta de Topo

A reta de Topo caracteriza-se por ser perpendicular ao plano vertical de projeção ( $\pi'$ ) e paralela ao plano horizontal de projeção ( $\pi$ ), e por possuir pontos com mesma abscissa e mesma cota. Em é pura, a sua projeção vertical é reduzida a um ponto, enquanto a projeção horizontal, perpendicular à linha de terra, aparece em verdadeira grandeza (Figura 3.6).

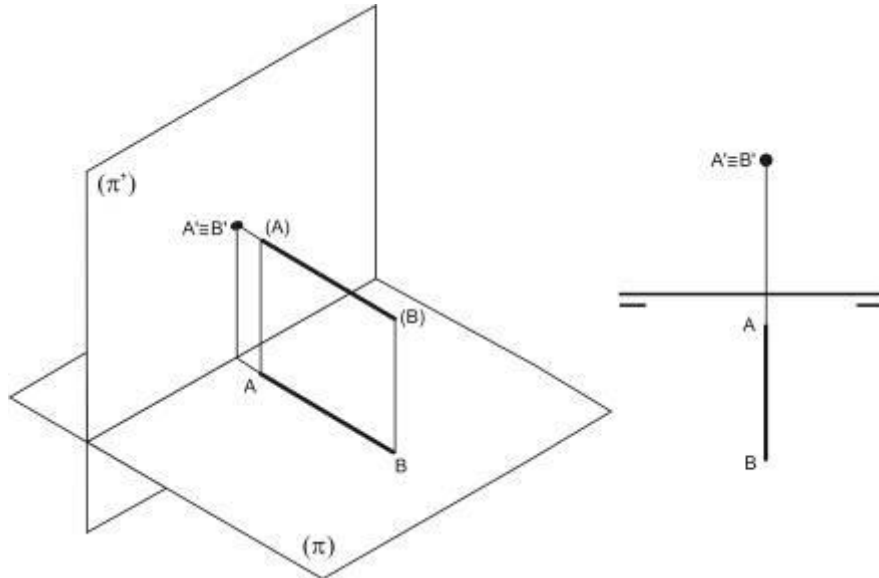


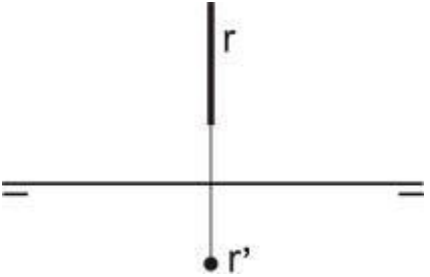
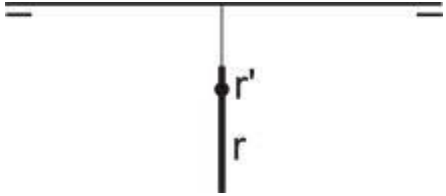
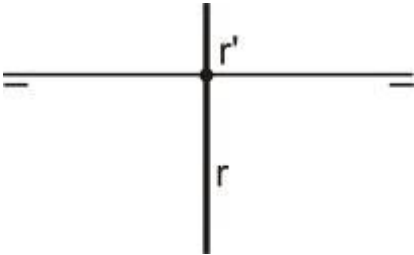
Figura 3.6 – Reta de Topo

No Quadro 3.2 tem-se uma análise das posições que um segmento de reta de Topo pode assumir em relação aos planos de projeção.

Quadro 3.2 – Posições particulares da reta de Topo

<p>1. Segmento no 1º Diedro (afastamento e cota positivos):</p>	
<p>2. Segmento no 2º Diedro (afastamento negativo e cota positiva):</p>	

Quadro 3.2 – Continuação

3. Segmento no 3° Diedro (afastamento e cota negativos):	
4. Segmento no 4° Diedro (afastamento positivo e cota negativa):	
5. Segmento no plano horizontal ( $\pi$ ) (cota nula):	

### 3.2.3 – Reta Vertical

A reta Vertical é paralela ao plano vertical de projeção ( $\pi'$ ) e perpendicular ao plano horizontal de projeção ( $\pi$ ), possuindo pontos com mesma abscissa e mesmo afastamento. Em é pura, a sua projeção horizontal é reduzida a um ponto, enquanto a projeção vertical, perpendicular à linha de terra, aparece em verdadeira grandeza (Figura 3.7).

No Quadro 3.3 apresenta-se uma análise das posições que um segmento de reta Vertical pode assumir em relação aos planos de projeção.

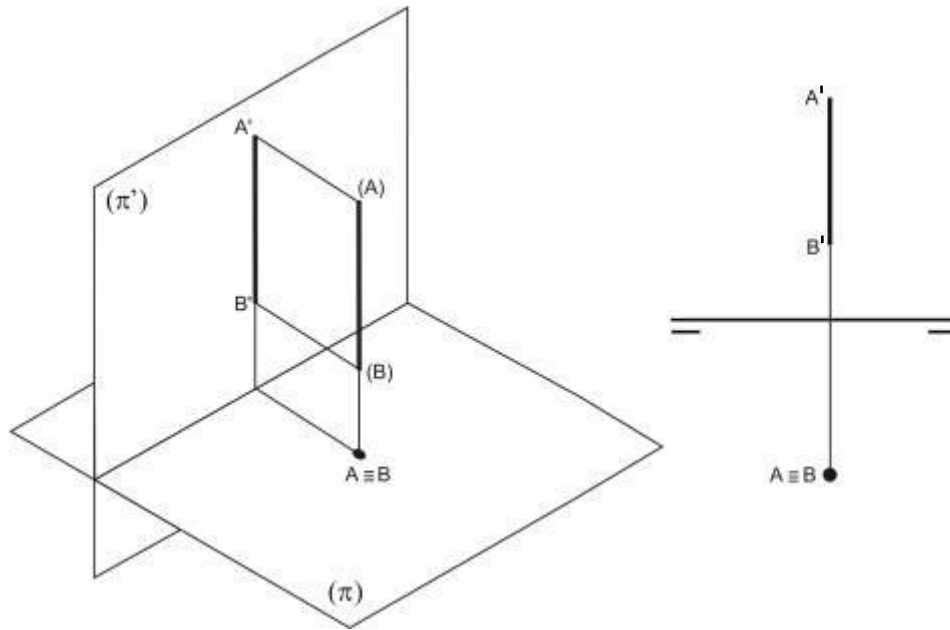




Figura 3.7 – Reta Vertical

Quadro 3.3 – Posições particulares da reta vertical

<p>1. Segmento no 1º Diedro (afastamento e cota positivos):</p>	
<p>2. Segmento no 2º Diedro (afastamento negativo e cota positiva):</p>	
<p>3. Segmento no 3º Diedro (afastamento e cota negativos):</p>	

Quadro 3.3 – Continuação

4. Segmento no 4º Diedro (afastamento positivo e cota negativa):	
5. No plano vertical ( $\pi'$ ) (afastamento nulo):	

### 3.2.4 Reta Horizontal ou Reta de Nível

A reta Horizontal caracteriza-se por ser paralela ao plano horizontal de projeção ( $\pi$ ) e oblíqua ao plano vertical de projeção ( $\pi'$ ), possuindo pontos com cota constante. Em *épura*, apresenta projeção vertical paralela à linha de terra, enquanto a sua projeção horizontal, oblíqua à linha de terra, aparece em verdadeira grandeza (Figura 3.8).

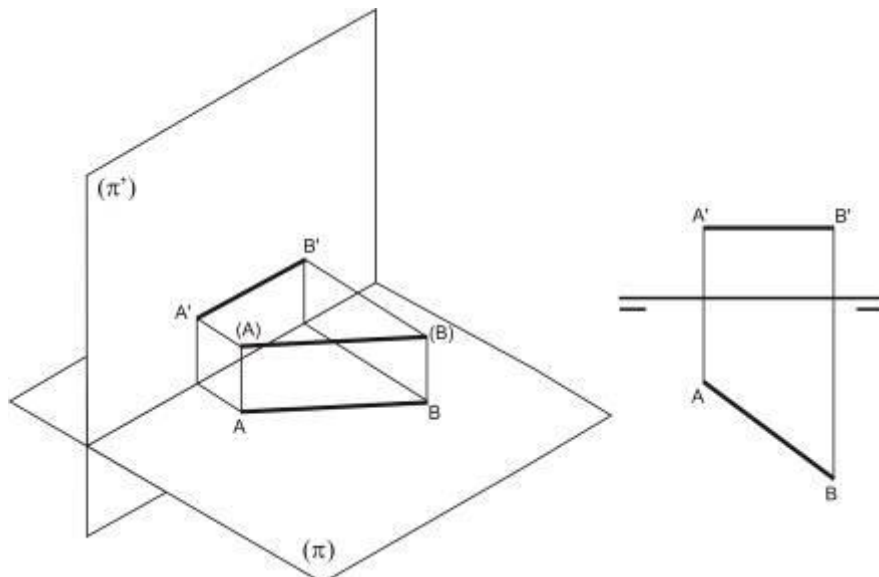


Figura 3.8 – Reta Horizontal

No quadro 3.4 são apresentadas as diferentes posições que um segmento de reta Horizontal pode assumir em relação aos planos de projeção.

Quadro 3.4 – Posições particulares da reta Horizontal

<p>1. Segmento no 1º diedro (afastamento e cota positivos):</p>	
<p>2. Segmento no 2º diedro (afastamento negativo e cota positiva):</p>	
<p>3. Segmento no 3º diedro (afastamento e cota negativos):</p>	
<p>4. Segmento no 4º diedro (afastamento positivo e cota negativa):</p>	
<p>5. Segmento no plano horizontal (<math>\pi</math>) (cota nula):</p>	

### 3.2.5 Reta Frontal ou Reta de Frente

A reta Frontal caracteriza-se por ser oblíqua ao plano horizontal de projeção ( $\pi$ ) e paralela ao plano vertical de projeção ( $\pi'$ ), possuindo pontos com afastamento constante. Em é pura, apresenta projeção horizontal paralela à linha de terra, enquanto a sua projeção vertical, oblíqua à linha de terra, aparece em verdadeira grandeza (Figura 3.9).

No quadro 3.5 são apresentadas as diferentes posições que um segmento de reta Frontal pode assumir em relação aos planos de projeção.

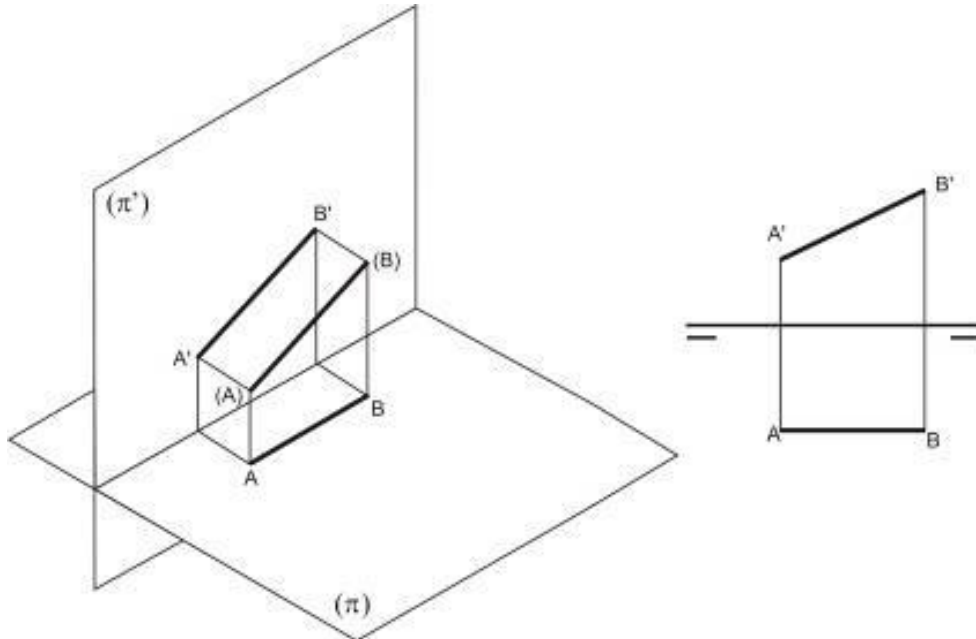


Figura 3.9 – Reta Frontal

Quadro 3.5 – Posições particulares da reta frontal

<p>1. Segmento no 1º diedro (afastamento e cota positivos):</p>	
<p>2. Segmento no 2º diedro (afastamento negativo e cota positiva):</p>	
<p>3. Segmento no 3º diedro (afastamento e cota negativos):</p>	

Quadro 3.5 – Continuação

<p>4. Segmento no 4º diedro (afastamento positivo e cota negativa):</p>	
<p>5. Segmento no plano vertical (<math>\pi'</math>) (afastamento nulo):</p>	

### 3.2.6 Reta de Perfil

A reta de Perfil é oblíqua aos dois planos de projeção e ortogonal à linha de terra, possuindo todos os pontos na mesma abscissa. Assim, todos os pontos de uma reta de Perfil encontram-se num plano perpendicular aos dois planos de projeção, denominado plano de Perfil. Na Figura 3.10, o plano ( $\alpha$ ), que contém a reta de Perfil (A)(B), é o plano de Perfil que contém esta reta. Na é pura correspondente, percebe-se que as suas duas projeções de uma reta de Perfil são perpendiculares à linha de terra.

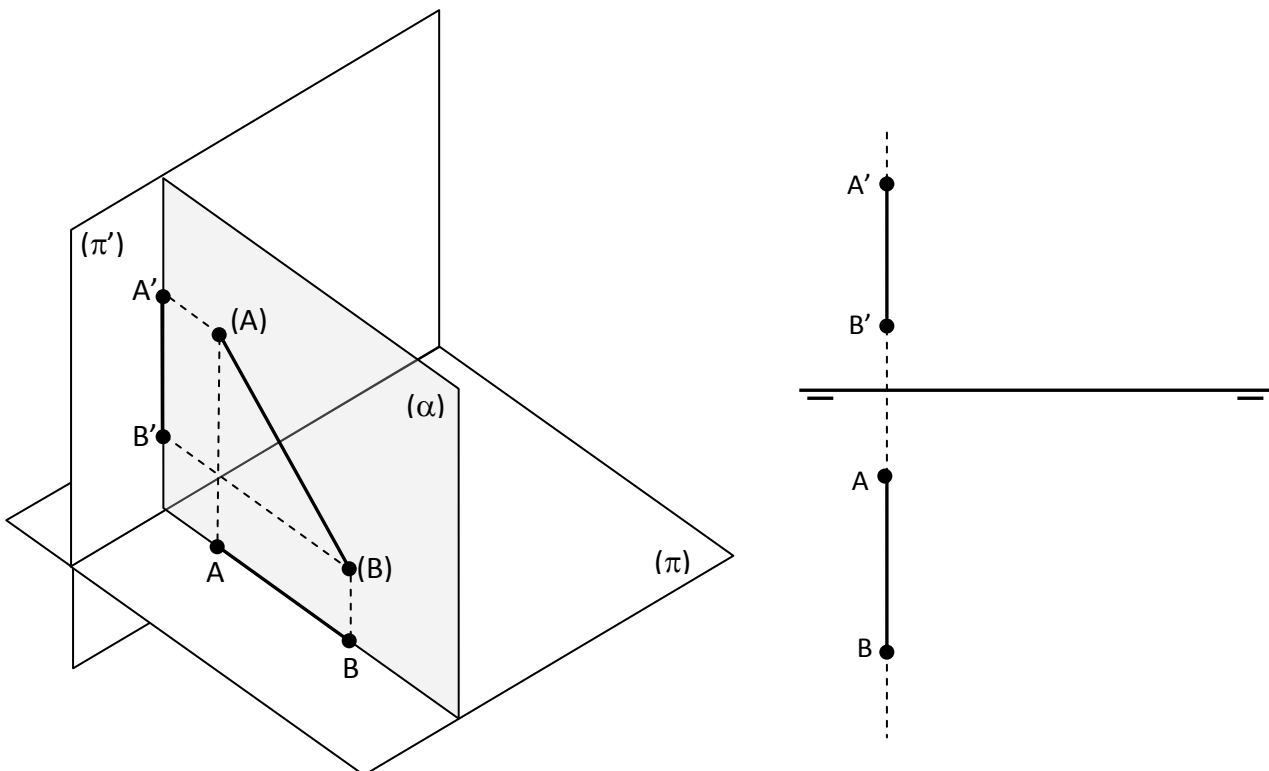


Figura 3.10 – Reta de Perfil

### 3.2.7 Reta de Genérica ou Qualquer

A reta Qualquer é oblíqua aos dois planos de projeção e à linha de terra, possuindo pontos com abscissa, afastamento e cota diferentes. Em épora, as suas duas projeções são oblíquas à linha de terra (Figura 3.11).

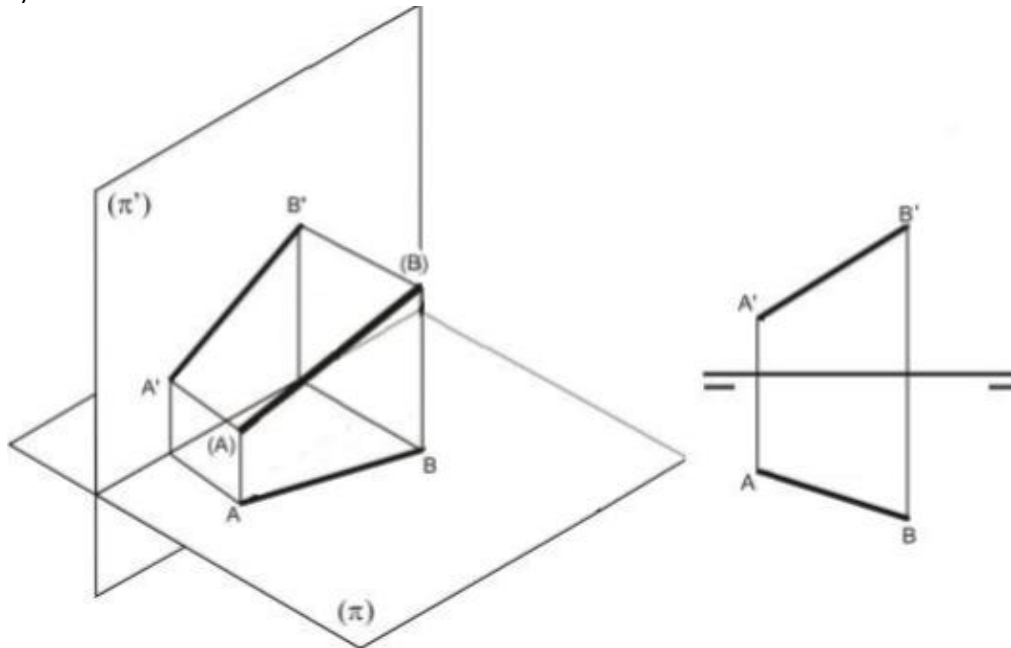


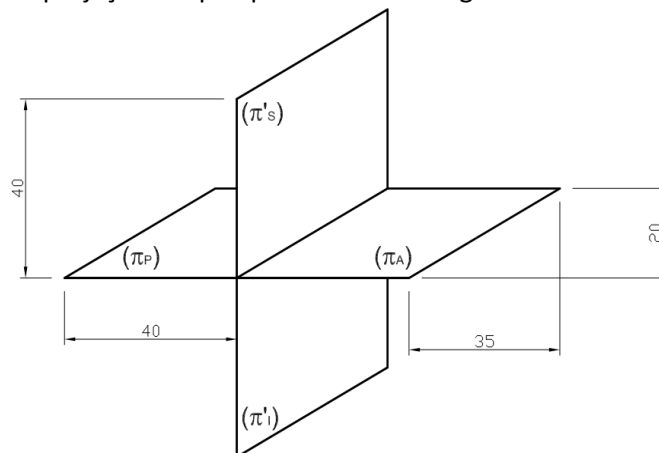
Figura 3.11 – Reta Qualquer

### ATIVIDADE PRÁTICA 04

01) Representar as retas (A)(B), (C)(D), (E)(F), (G)(H), (I)(J), (K)(L) e (M)(N) no espaço e em épora, classificando-as quanto à sua posição em relação aos planos de projeção. Dados:

(A) [ 10 ; 20 ; 10 ]	(B) [ 30 ; 10 ; 30 ]	(C) [ -30 ; -20 ; -20 ]	(D) [ 0 ; -20 ; 30 ]
(E) [ 20 ; 10 ; 10 ]	(F) [ 20 ; 30 ; -20 ]	(G) [ 0 ; 10 ; 20 ]	(H) [ 30 ; 10 ; 20 ]
(I) [ -10 ; 10 ; -20 ]	(J) [ 20 ; 20 ; -20 ]	(K) [ 20 ; 10 ; 10 ]	(L) [ 20 ; 10 ; 30 ]
(M) [ 10 ; 10 ; 20 ]	(N) [ 10 ; 30 ; 20 ]		

Na resolução do Exercício 01, representar cada reta no espaço em um desenho separado, desenhando-se os planos de projeção em perspectiva com as seguintes dimensões:



02) Traçar uma épora contendo as retas (P)(Q), horizontal, (R)(S), de topo, e (T)(U), de perfil. Dados:

(P) [ -20 ; 10 ; 10 ]	(Q) [ 20 ; 30 ; ? ]	(R) [ 10 ; 10 ; ? ]
(S) [ ? ; 40 ; 20 ]	(T) [ 0 ; 35 ; 25 ]	(U) [ ? ; 25 ; 15 ]



### 3.3 PERTINÊNCIA DE PONTO E RETA

Em geral, um ponto pertence a uma reta quando as projeções desse ponto estão sobre as projeções de mesmo nome da reta, ou seja, quando a projeção horizontal do ponto está sobre a projeção horizontal da reta e a projeção vertical do ponto está sobre a projeção vertical da reta. Na Figura 3.12, o ponto (C), que não pertence ao segmento de reta (A)(B), possui apenas a projeção horizontal sobre a projeção horizontal desse segmento. Já o ponto (D), que pertence ao segmento (A)(B), possui as duas projeções sobre as projeções de mesmo nome do segmento.

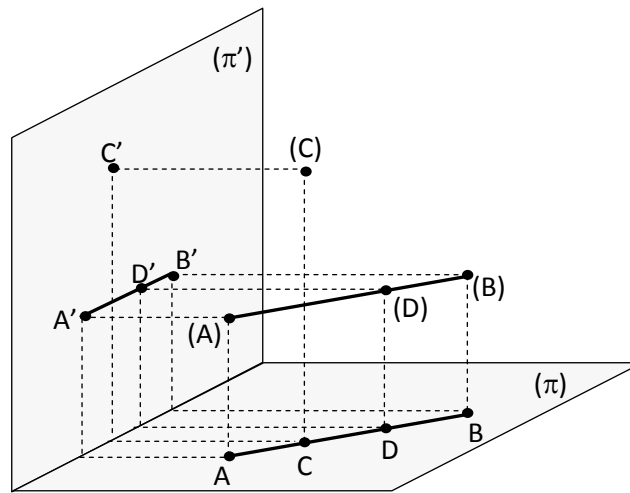


Figura 3.12 – Pertinência de ponto e reta

Aplicando-se a regra geral, observa-se que o ponto (B) da Figura 3.13 pertence à reta (r). Já o ponto (A) não pertence à reta (r) na figura 3.14, enquanto o ponto (C) pertence à reta (r) da Figura 3.15.

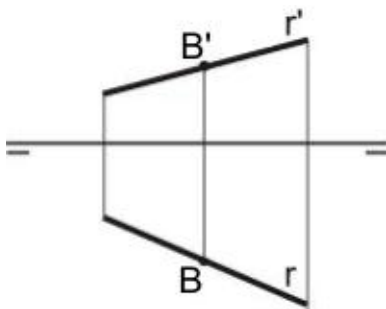


Figura 3.13

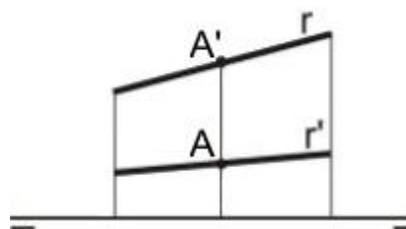


Figura 3.14

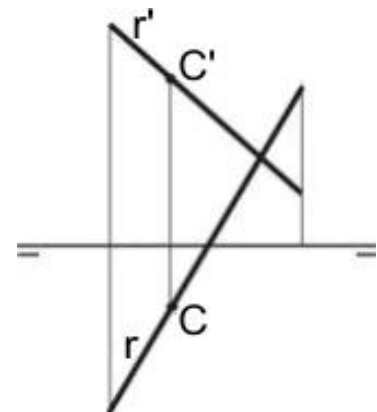


Figura 3.15

Para que um ponto pertença a uma reta Vertical, basta que sua projeção horizontal coincida com a projeção horizontal da reta, que é reduzida a um ponto. Seguindo-se o mesmo raciocínio, para que um ponto pertença a uma reta de Topo, basta que sua projeção vertical coincida com a projeção vertical da reta, que também é reduzida a um ponto. Assim, na época da Figura 3.16, o ponto (A) pertence à reta Vertical (r) e o ponto (B) pertence à reta de Topo (s).

A regra geral de pertinência de ponto e reta apresentada anteriormente possui uma exceção: no caso da reta de Perfil, não é suficiente que as projeções do ponto estejam sobre as projeções de mesmo nome da reta para que o ponto pertença a ela. Como a reta é ortogonal à linha de terra, qualquer ponto localizado na mesma abscissa terá suas projeções sobre as projeções correspondentes da reta.

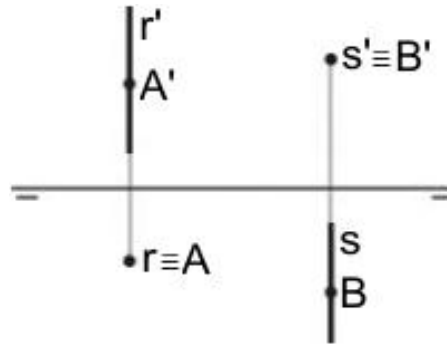


Figura 3.16 – Pertinência de ponto a uma reta Vertical e a uma reta de Topo

Para se verificar se um dado ponto pertence a uma reta de Perfil, torna-se necessário visualizar a reta e o ponto sob outro ponto de vista. Isso pode ser feito com uma operação denominada *rebatimento*, pela qual se rebate o plano que contém a reta de Perfil, denominado *plano de Perfil*, sobre o plano vertical de projeção.

Como exemplo, tem-se, na Figura 3.17(a), o rebatimento do plano ( $\alpha$ ) e do segmento (A)(B) apresentados na Figura 3.10 sobre o plano vertical de projeção. Cabe salientar que no processo de rebatimento somente as projeções horizontais são rebatidas, e sempre no sentido anti-horário.

Em *épura*, para se rebater a projeção horizontal de um determinado ponto, traça-se um arco de circunferência a partir dessa projeção, no sentido anti-horário, até que este intercepte a linha de terra (Figura 3.17(b)). O centro do arco de circunferência deve estar localizado na linha de terra, na abscissa correspondente à da reta de Perfil. A nova posição de uma dada projeção horizontal é obtida no ponto em que o arco de circunferência intercepta a linha de terra. As novas posições das projeções horizontais, bem como as novas posições dos pontos rebatidos são representadas com o índice "1". Esta notação deve ser utilizada sempre que o rebatimento for realizado, de modo a indicar a nova posição dos pontos no espaço.

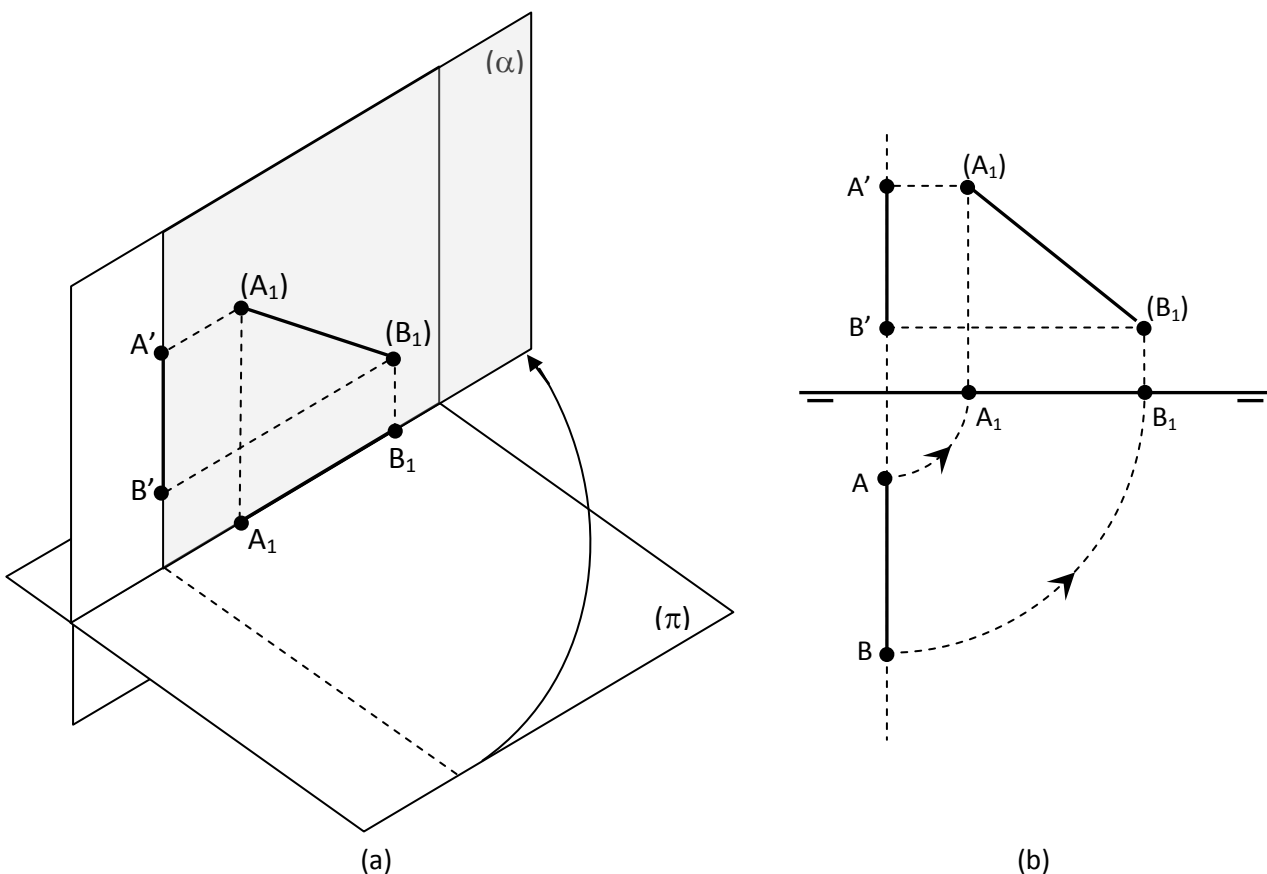


Figura 3.17 – Rebatimento do plano de Perfil ( $\alpha$ ) e do segmento (A)(B) sobre ( $\pi'$ ): (a) no espaço e (b) em *épura*

Para se determinar se um ponto pertence a uma reta de Perfil, deve-se rebater também o ponto sobre o plano vertical de projeção. Após o rebatimento, conclui-se que o ponto não pertence à reta se não estiver sobre a reta rebatida (Figura 3.18). Se, após o rebatimento, o ponto situar-se sobre a reta rebatida, pertencerá à reta de Perfil (Figura 3.19).

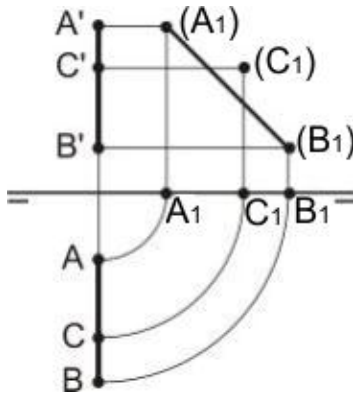


Figura 3.18

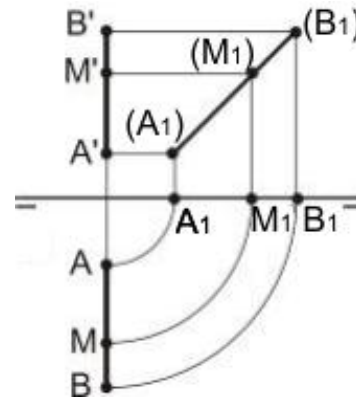


Figura 3.19

### 3.4 TRAÇOS DE RETAS

O traço de uma reta sobre um plano é o ponto onde essa reta intercepta o plano. Ainda que uma determinada reta possa interceptar infinitos planos, os traços de uma reta sobre os planos de projeção tem uma importância especial no estudo das retas, visto que a sua determinação permite o conhecimento da trajetória da reta no espaço.

O ponto onde uma reta intercepta o plano horizontal de projeção é denominado *traço horizontal*, ou (H), enquanto o ponto onde uma reta atravessa o plano vertical de projeção é chamado de *traço vertical*, ou (V). Como o traço horizontal (H) de uma reta situa-se sobre o plano horizontal de projeção, sempre terá cota nula, e como o traço vertical (V) de uma reta situa-se sobre o plano vertical de projeção, sempre terá afastamento nulo. Daí conclui-se que a projeção vertical H' do traço horizontal (H) e a projeção horizontal V do traço vertical (V) estão sempre, sem exceção alguma, sobre a linha de terra (Figuras 3.20 e 3.21).

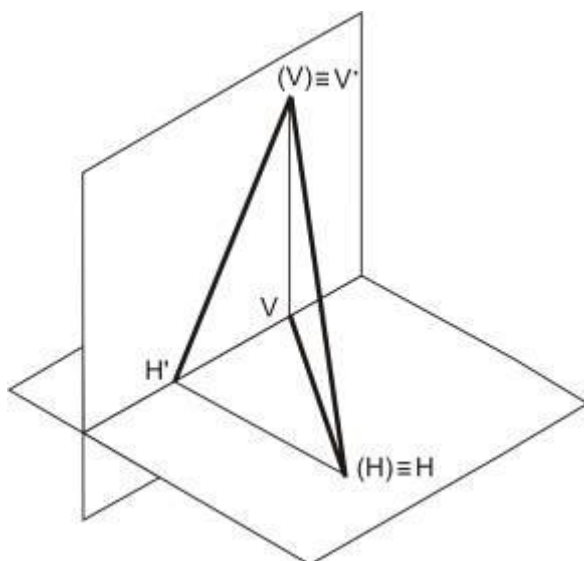


Figura 3.20

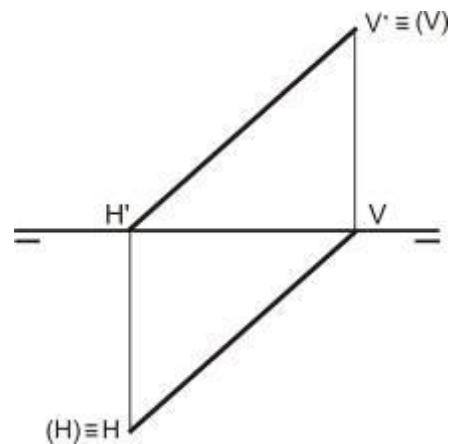


Figura 3.21

Em casos especiais, os traços horizontal e vertical podem coincidir em um mesmo ponto da linha de terra, como, por exemplo, no caso apresentado na Figura 3.22.

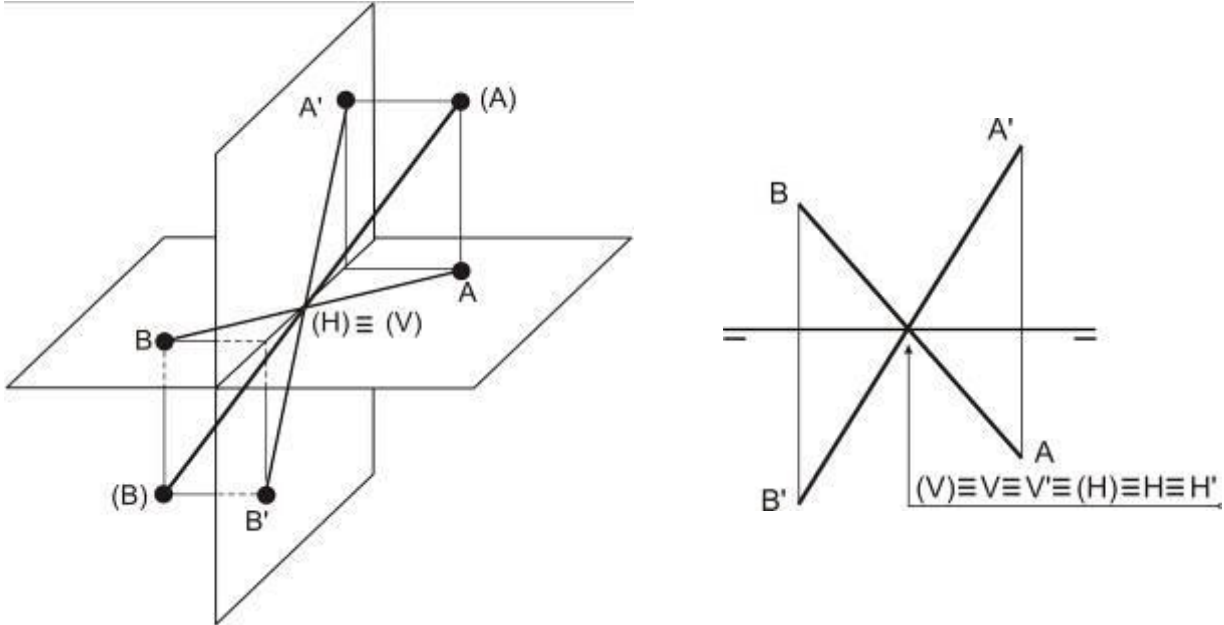


Figura 3.22 – Reta com traços coincidentes

Quando uma reta for paralela aos dois planos de projeção, não terá traços sobre nenhum desses planos. Este é o caso da reta Fronto-horizontal, cujas projeções são paralelas à linha de terra (Figura 3.23).

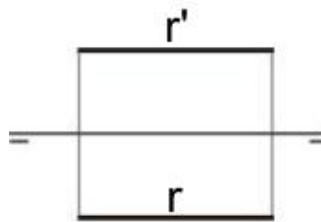


Figura 3.23 – Reta Fronto-horizontal

Quando uma reta for paralela a um dos planos de projeção, não terá traço sobre esse plano. É o caso das retas Horizontal, Frontal, de Topo e Vertical, que só possuem um traço (Figura 3.24).

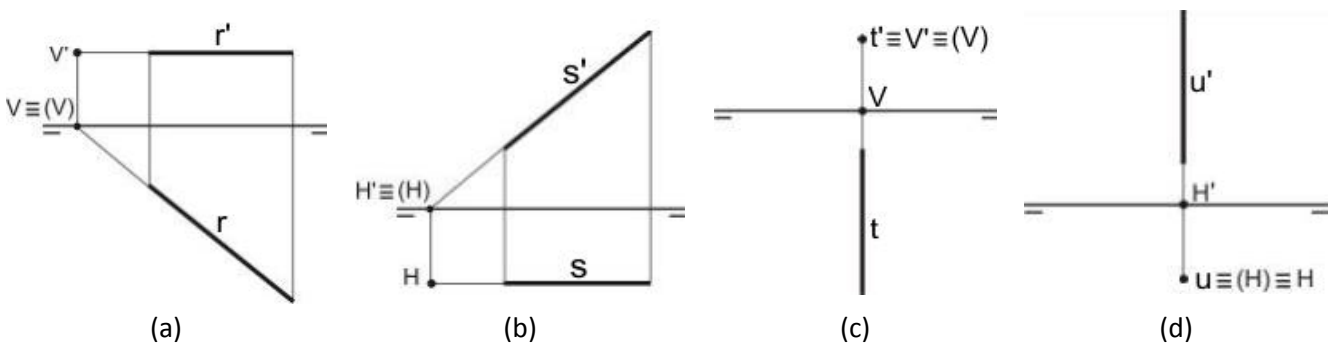


Figura 3.24 – Retas que possuem apenas um traço: (a) Horizontal, (b) Frontal, (c) de Topo e (d) Vertical

Uma reta só possui os dois traços quando é oblíqua aos dois planos de projeção. Os únicos tipos de retas que possuem os dois traços são as retas Qualquer e de Perfil. Na Figura 3.25, tem-se a épura de uma reta Qualquer com os seus dois traços.

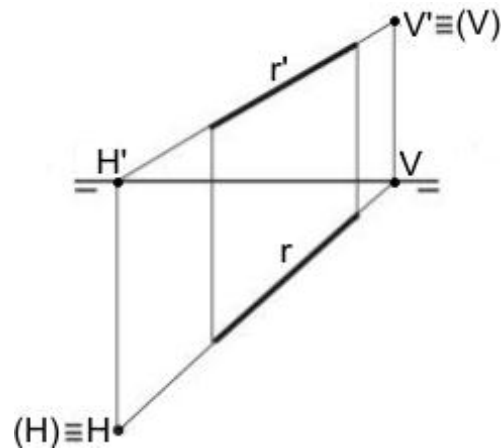


Figura 3.25 – Traços da reta genérica

Para a determinação dos traços da reta de Perfil, é necessário efetuar-se o rebatimento da reta sobre o plano vertical de projeção (Figura 3.26).

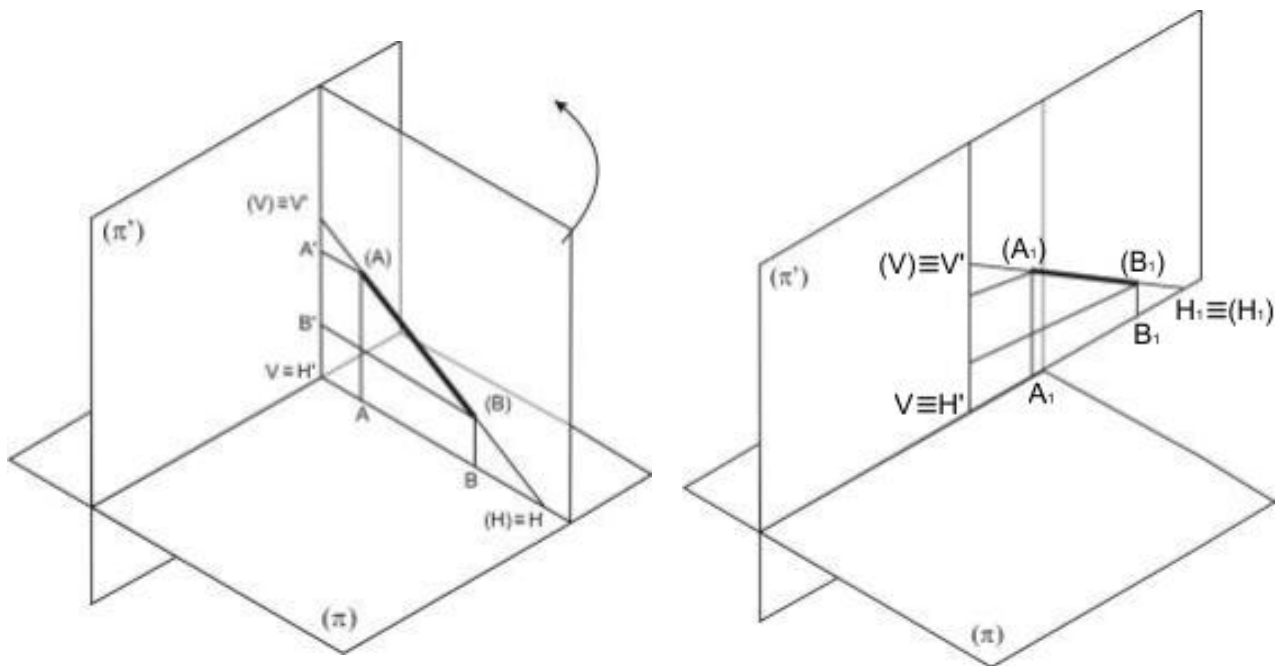


Figura 3.26 – Traços de uma reta de Perfil

Em é pura, a determinação dos traços da reta de Perfil é realizada conforme a Figura 3.27. Após o rebatimento, prolonga-se a reta nos dois sentidos, de modo que esta intercepte a linha de terra e a linha de chamada que passa pela abscissa da reta de perfil. No ponto onde a reta rebatida intercepta a linha de terra, tem-se, em coincidência, o traço horizontal rebatido ( $H_1$ ) e a projeção horizontal do traço horizontal rebatida  $H_1$ . No ponto onde a reta rebatida intercepta a linha de chamada que passa pela abscissa da reta de perfil, tem-se, em coincidência, o traço vertical ( $V$ ) e a projeção vertical do traço vertical  $V'$ . Para finalizar a determinação dos traços da reta de Perfil, deve-se realizar o *alçamento* (operação oposta ao rebatimento) do traço horizontal da reta. Com esta operação, determina-se a posição original do traço horizontal ( $H$ ) e da projeção horizontal do traço horizontal  $H$  da reta de perfil. Vale lembrar que o alçamento sempre é realizado no sentido horário, ao contrário do rebatimento.

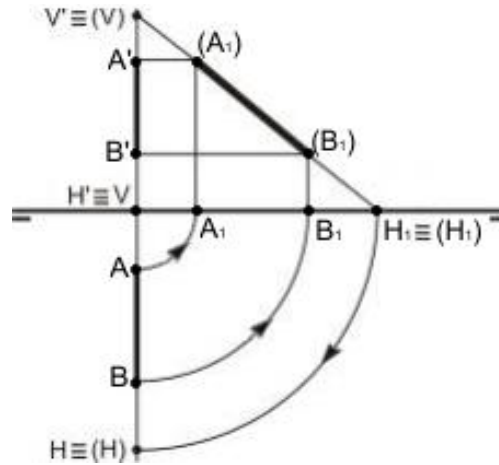


Figura 3.27 – Determinação dos traços de uma reta de Perfil

É importante salientar que sempre que o ponto possuir afastamento negativo, a sua projeção horizontal rebatida situar-se-á à esquerda da linha de chamada que passa pela abscissa da reta de perfil. É o caso do ponto (B) da Figura 3.28, cuja projeção horizontal rebatida  $B_1$  situa-se à esquerda da referida linha de chamada.

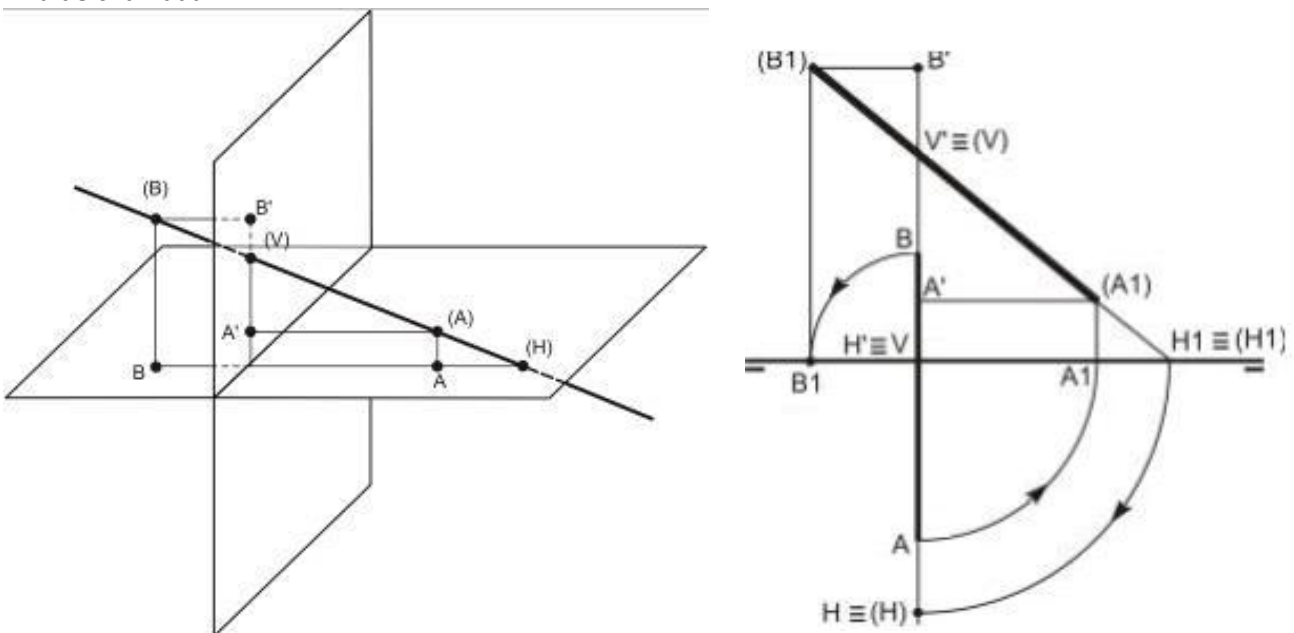


Figura 3.28 – Traços de uma reta de Perfil no espaço e em épora

### ATIVIDADE PRÁTICA 05

- 01) Verificar se os pontos (C) e (D) pertencem à reta (A)(B). Dados:  
 (A) [ 0 ; 30 ; 10 ]      (B) [ 40 ; 10 ; 10 ]      (C) [ 20 ; 20 ; 10 ]      (D) [ 30 ; -10 ; -15 ]
- 02) Verificar se os pontos (G) e (I) pertencem à reta de perfil (E)(F). Dados:  
 (E) [ 20 ; 10 ; 30 ]      (F) [ ? ; 30 ; 10 ]      (G) [ 20 ; 20 ; 20 ]      (I) [ 20 ; 20 ; 30 ]
- 03) Dada a reta (J)(K), achar os seus traços e determinar a sua trajetória no espaço:  
 (J) [ 0 ; -20 ; -10 ]      (K) [ 40 ; 20 ; 25 ]
- 04) Dada a reta de perfil (L)(M), determinar a sua verdadeira grandeza, os seus traços e a sua trajetória no espaço:  
 (L) [ 0 ; 30 ; -30 ]      (M) [ ? ; 10 ; 20 ]

### 3.5 POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

Duas retas podem ser *coplanares* ou *não coplanares*. Quando não existe um plano capaz de conter duas retas dadas, estas retas são ditas *não coplanares* (ou *reversas*). Nesse caso, qualquer plano que contiver uma das retas será interceptado pela outra em um ponto (Figura 3.29).

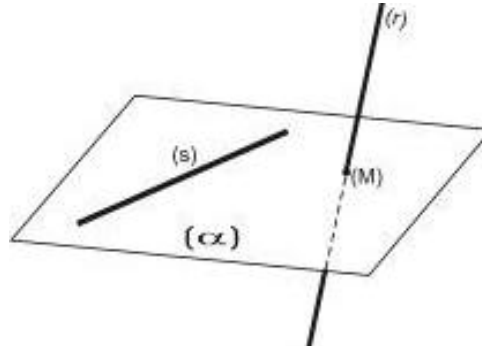


Figura 3.29 – Retas não coplanares ou reversas

Quando duas retas admitem um plano comum, são ditas *coplanares* e, nesse caso, podem ser *paralelas* ou *concorrentes*. Quando o ponto comum entre as duas retas coplanares for “impróprio”, ou seja, estiver no infinito, as retas são ditas paralelas (Figura 3.30(a)). Quando o ponto comum for “próprio”, ou seja, quando as duas retas se interceptarem, diz-se que as retas são concorrentes (Figura 3.30(b)).

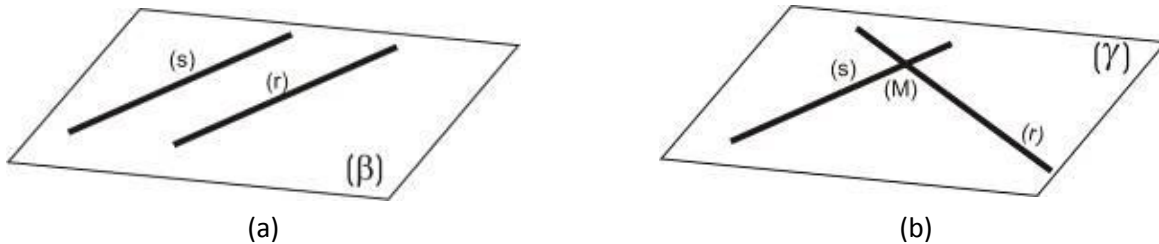


Figura 3.30 – Retas coplanares: (a) paralelas e (b) concorrentes

Em *épura*, a determinação da posição relativa entre duas retas é realizada a partir da análise das suas projeções. Existem regras que permitem determinar se duas retas são paralelas ou concorrentes. Caso duas retas dadas não se enquadrem em nenhuma dessas regras, serão reversas. Tais regras, apresentadas a seguir, são válidas para todos os tipos de retas, com exceção das retas de perfil, para as quais serão necessárias análises complementares.

#### 3.5.1 Retas concorrentes

Duas retas são concorrentes se:

a) o ponto em que as projeções verticais se interceptam encontra-se na mesma linha de chamada do ponto em que as projeções horizontais se interceptam (Figura 3.31).

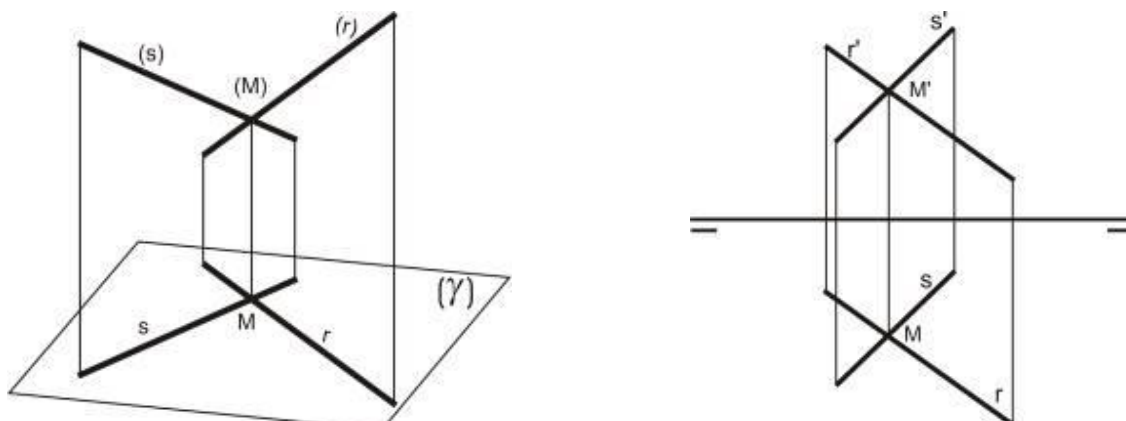


Figura 3.31 – Retas concorrentes

b) duas projeções de mesmo nome coincidem e as outras duas interceptam-se (Figura 3.32). Nesse caso, o plano comum às duas retas é *projetante*, ou seja, perpendicular a um dos planos de projeção.

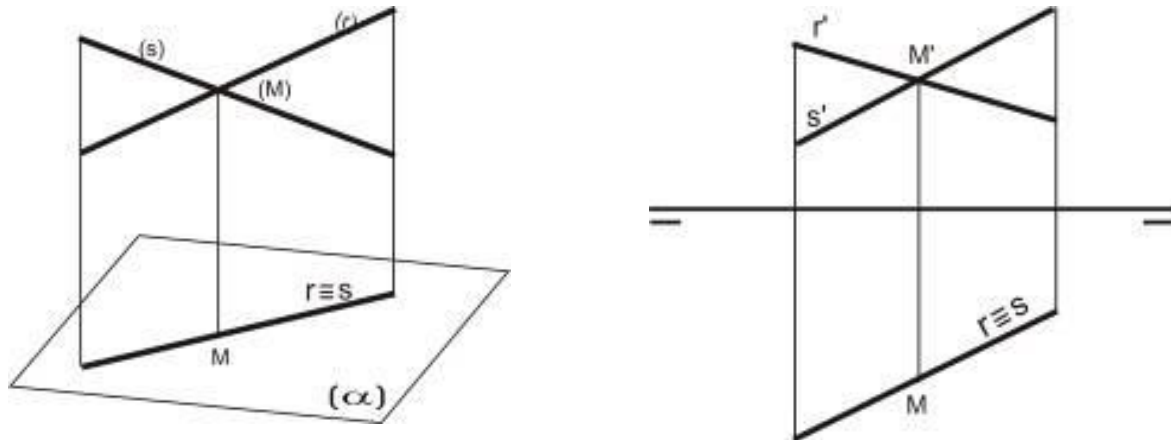


Figura 3.32 – Retas concorrentes com duas projeções de mesmo nome coincidentes

c) uma das projeções de uma das retas é um ponto localizado sobre a projeção de mesmo nome da outra reta (Figura 3.33). Neste caso estão incluídas as retas de Topo e Vertical.

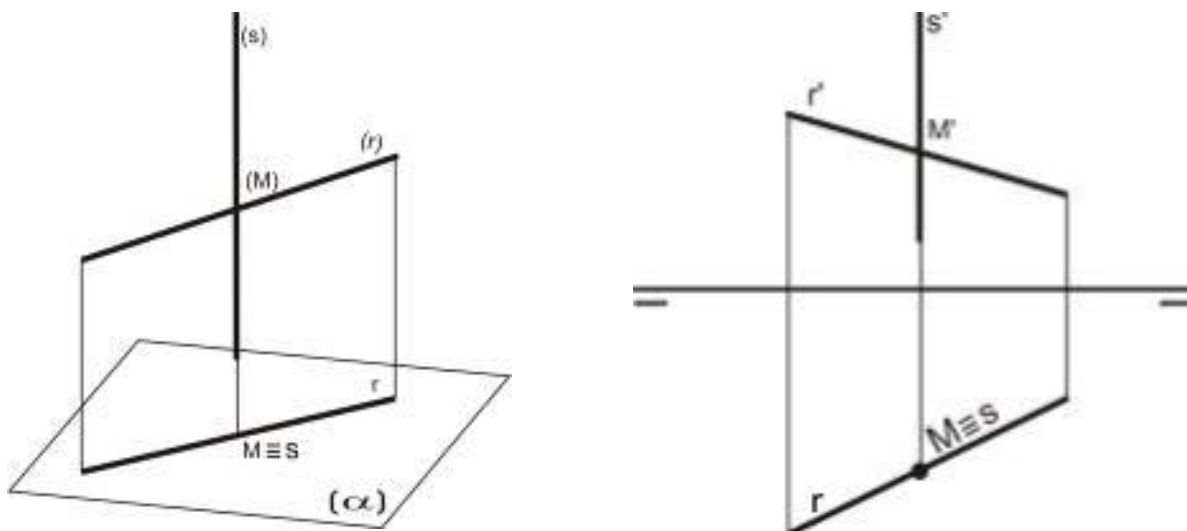


Figura 3.33 – Retas concorrentes com uma das projeções reduzida a um ponto

### 3.5.2 Retas Paralelas

Duas retas são paralelas se:

a) as projeções de mesmo nome das duas retas são paralelas (Figura 3.34).

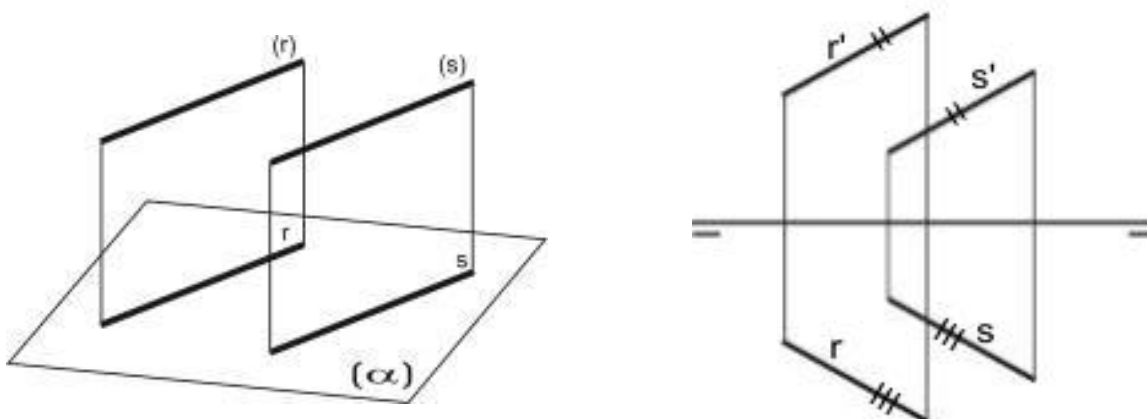


Figura 3.34 – Retas paralelas



b) duas projeções de mesmo nome coincidem e as outras duas são paralelas (Figura 3.35). Nesse caso, o plano comum às duas retas é projetante.

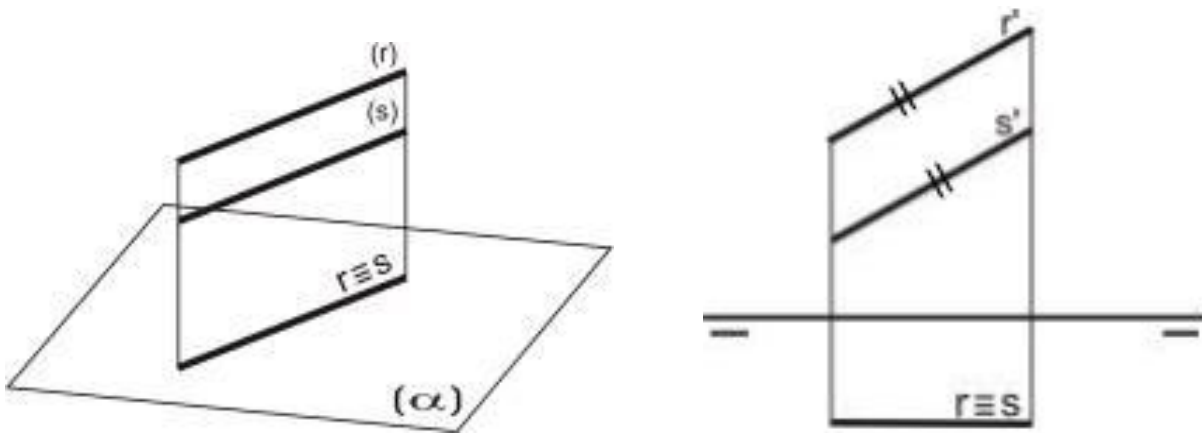


Figura 3.35 – Retas paralelas com duas projeções de mesmo nome coincidentes

c) duas projeções de mesmo nome estão reduzidas a um ponto (Figura 3.36). É o caso de duas retas Verticais ou de duas retas de Topo.

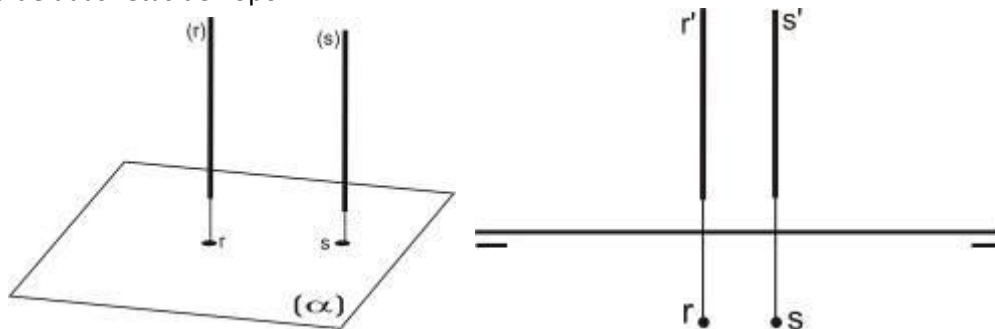


Figura 3.36 – Retas paralelas com projeções de mesmo nome reduzidas a um ponto

É importante salientar que duas retas só serão paralelas se forem do mesmo tipo. Ou seja, uma reta Fronto-horizontal só pode ser paralela a outra reta Fronto-horizontal, e assim por diante.

### 3.5.3 Posições Relativas de duas Retas de Perfil

As regras apresentadas nos itens 3.5.1 e 3.5.2 não permitem definir a posição relativa entre duas retas de Perfil. Contudo, é possível eliminar pelo menos uma possibilidade a priori. Assim, quando duas retas de Perfil situam-se num mesmo plano de Perfil (na mesma abscissa), são necessariamente coplanares e, neste caso, não podem ser reversas. Por outro lado, quando duas retas de Perfil situam-se em planos de Perfil diferentes (em abscissas diferentes), não podem ser concorrentes.

Para se determinar a posição relativa de duas retas de perfil é necessário rebatê-las sobre o plano vertical de projeção, independentemente de estarem no mesmo plano de Perfil ou não. Com o rebatimento, é possível visualizar a inclinação das retas e, considerando-se as situações apresentadas a seguir, definir a posição relativa entre elas.

#### 3.5.3.1 Retas de Perfil situadas no mesmo plano de Perfil

Quando duas retas de Perfil situam-se no mesmo plano de Perfil (na mesma abscissa), suas projeções de mesmo nome estão sobrepostas. Nesse caso, as retas são coplanares e podem ser paralelas (Figura 3.37) ou concorrentes (Figura 3.38).

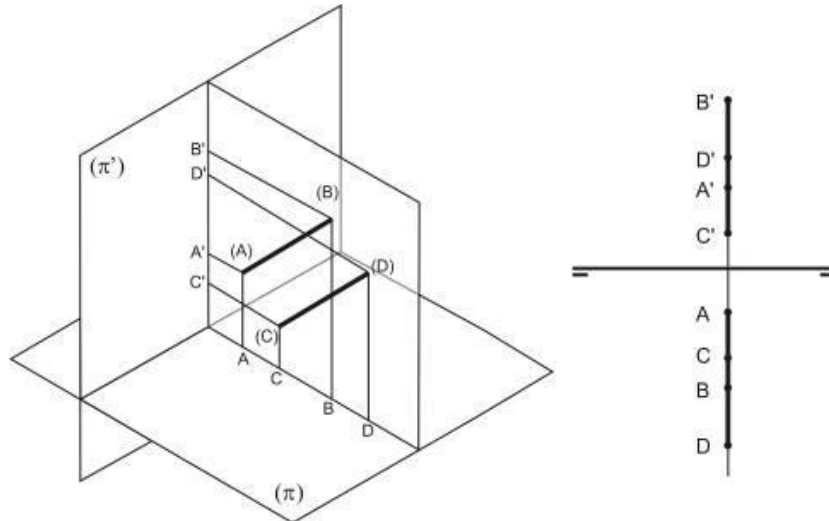


Figura 3.37 – Retas de Perfil paralelas situadas no mesmo plano de Perfil

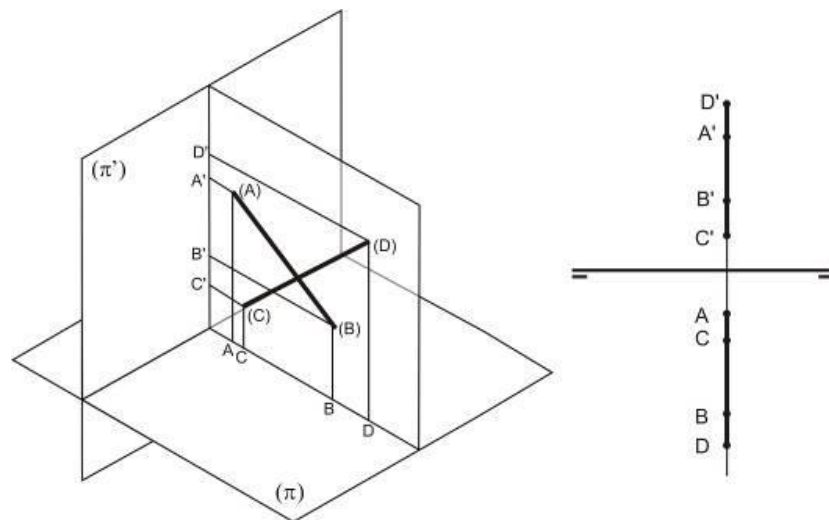


Figura 3.38 – Retas de Perfil concorrentes

### 3.5.3.2 Retas de Perfil situadas em planos de Perfil diferentes

Quando duas retas de Perfil situam-se em planos de Perfil diferentes (em abscissas diferentes), as suas projeções de mesmo nome são paralelas. Nesse caso, as retas podem ser paralelas (Figura 3.39) ou reversas (Figura 3.40).

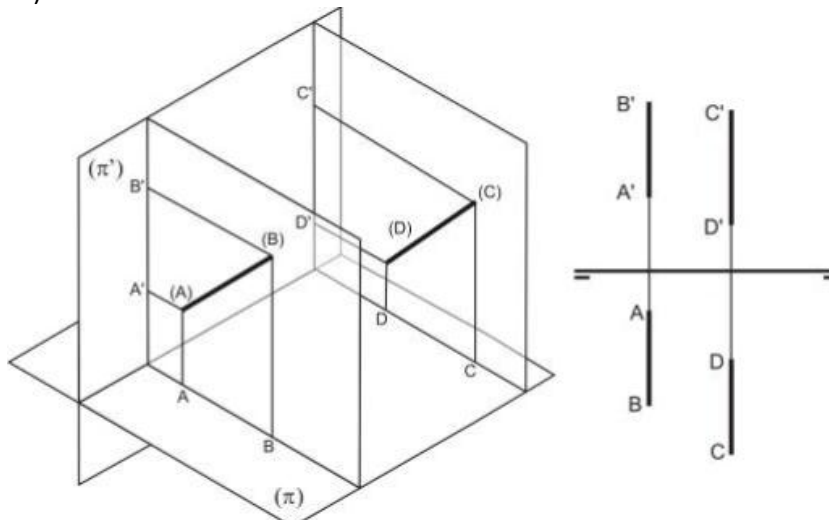


Figura 3.39 – Retas de Perfil paralelas situadas em planos de Perfil diferentes

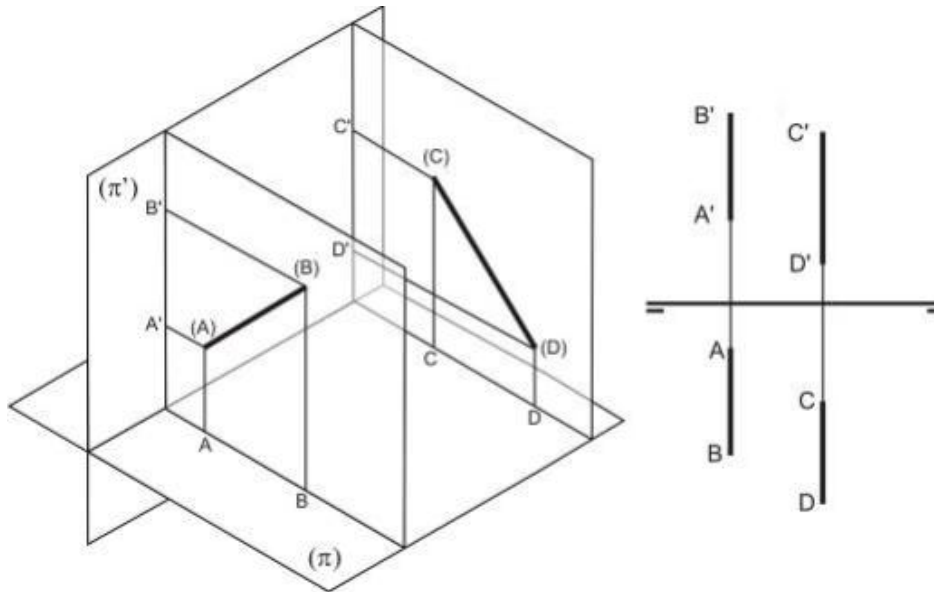


Figura 3.40 – Retas de Perfil reversas

#### ATIVIDADE PRÁTICA 06

01) Determinar a posição relativa entre as retas (A)(B) e (C)(D). Dados:

(A) [ 10 ; 20 ; 20 ]

(C) [ 0 ; 40 ; 5 ]

(B) [ 60 ; 30 ; 10 ]

(D) [ 50 ; 20 ; 30 ]

02) Determinar a posição relativa entre as retas (E)(F) e (W)(X). Dados:

(E) [ 0 ; 20 ; 20 ]

(W) [ 0 ; -10 ; 30 ]

(F) [ 40 ; 20 ; 40 ]

(X) [ 40 ; -10 ; 50 ]

03) Determinar a posição relativa entre as retas (I)(J) e (K)(L). Dados:

(I) [ 0 ; 40 ; -10 ]

(K) [ 10 ; 25 ; 5 ]

(J) [ 60 ; 10 ; 20 ]

(L) [ 60 ; 25 ; 5 ]

04) Por um ponto (O), traçar uma reta paralela à reta (M)(N). Dados:

(M) [ 10 ; 15 ; 10 ]

(O) [ 30 ; -10 ; -35 ]

(N) [ 50 ; 15 ; 25 ]

05) Determinar a posição relativa entre as retas (P)(Q) e (R)(S). Dados:

(P) [ 0 ; 0 ; 30 ]

(R) [ 20 ; 10 ; 50 ]

(Q) [ 0 ; 30 ; 10 ]

(S) [ 20 ; 40 ; 30 ]

06) Determinar a posição relativa entre as retas (T)(U) e (Y)(Z). Dados:

(T) [ 0 ; -20 ; 20 ]

(Y) [ -20 ; 10 ; 5 ]

(U) [ 0 ; 30 ; -20 ]

(Z) [ 40 ; 10 ; 20 ]

## UNIDADE 4 – ESTUDO DO PLANO

### 4.1 TRAÇOS DO PLANO

O traço de um plano é a reta formada pela intersecção deste plano com outro. Na Figura 4.1, o traço do plano ( $\alpha$ ) sobre o plano ( $\beta$ ) é a reta  $\alpha\beta$ .

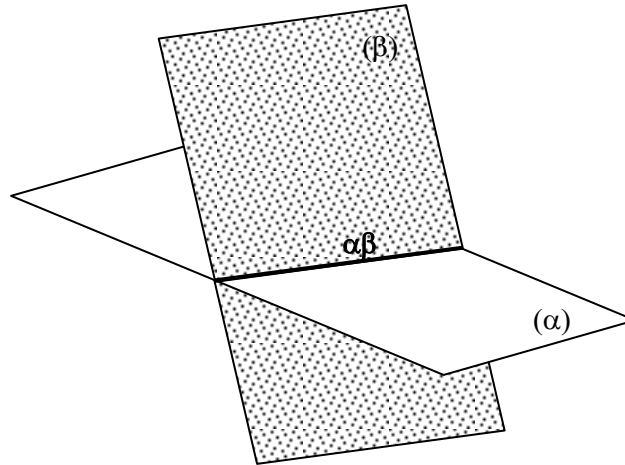


Figura 4.1 – Traço do plano ( $\alpha$ ) sobre o plano ( $\beta$ )

Geralmente, a expressão “traço de um plano” é utilizada para exprimir a intersecção de um dado plano com os planos de projeção. Assim o traço de um plano ( $\alpha$ ) sobre o plano horizontal de projeção é chamado de traço horizontal do plano ( $\alpha$ ) ou  $\alpha\pi$ , enquanto o traço deste mesmo plano sobre o plano vertical de projeção é chamado de traço vertical do plano ( $\alpha$ ) ou  $\alpha\pi'$  (Figura 4.2).

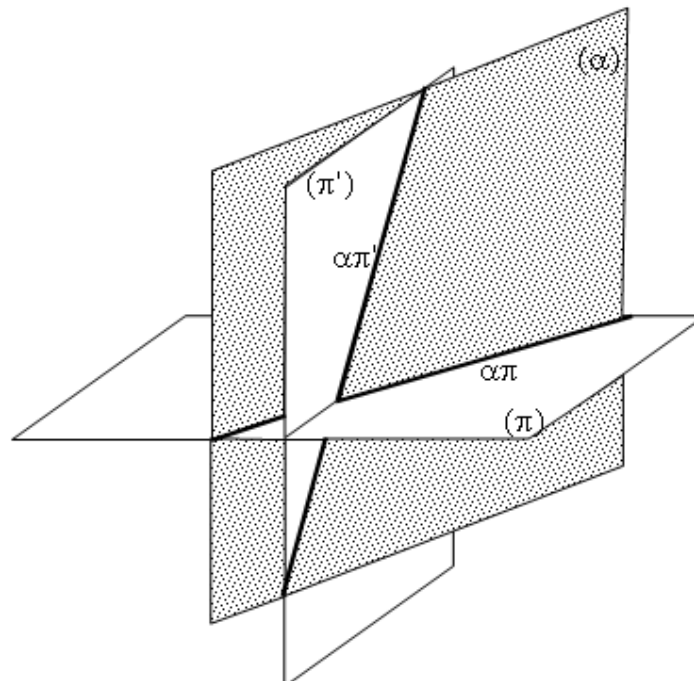


Figura 4.2 – Traços de um plano sobre os planos de projeção

Em geral, um plano possui dois traços. Entretanto, quando for paralelo a um dos planos de projeção, não terá traço nesse plano. A configuração dos traços de um plano em écura dependerá da posição do plano no espaço. No próximo tópico, são apresentados os tipos de plano em função da sua posição no espaço.

## 4.2 POSIÇÕES PARTICULARES

### 4.2.1 Plano Horizontal

Denomina-se plano Horizontal todo o plano paralelo ao plano horizontal de projeção. Um plano Horizontal sempre será perpendicular ao plano vertical de projeção, possuindo apenas traço vertical. O traço vertical de um plano Horizontal apresenta-se paralelo à linha de terra (Figura 4.3).

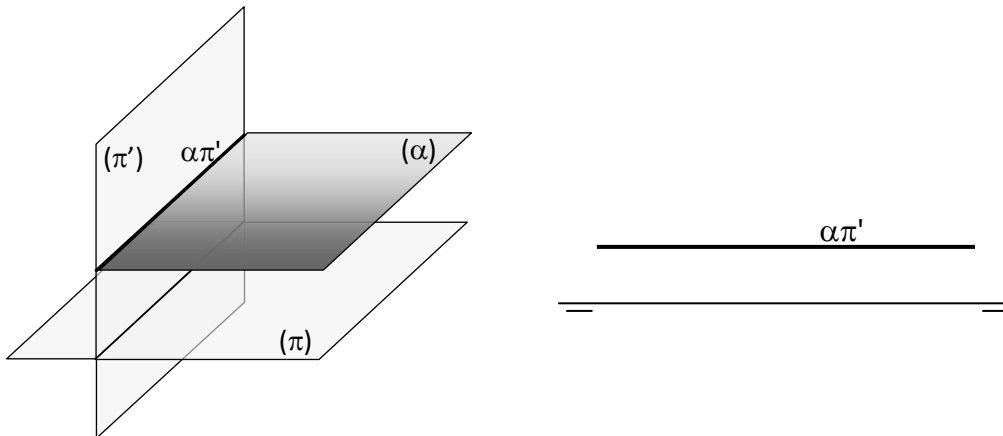


Figura 4.3 – Representação de um plano horizontal no espaço e em épura

### 4.2.2 Plano Frontal

Denomina-se plano Frontal todo o plano paralelo ao plano vertical de projeção. Um plano Frontal sempre será perpendicular ao plano horizontal de projeção, possuindo apenas traço horizontal. O traço horizontal de um plano Frontal apresenta-se paralelo à linha de terra (Figura 4.4).

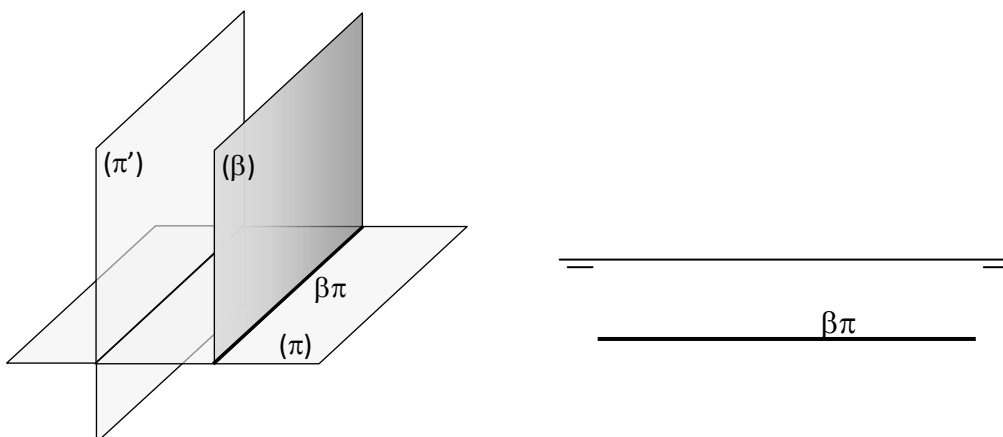


Figura 4.4 – Representação de um plano Frontal no espaço e em épura

### 4.2.3 Plano de Topo

Plano de Topo é o plano perpendicular ao plano vertical de projeção e oblíquo ao plano horizontal de projeção. Um plano de Topo possui traço horizontal perpendicular à linha de terra e traço vertical oblíquo a essa mesma linha (Figura 4.5).

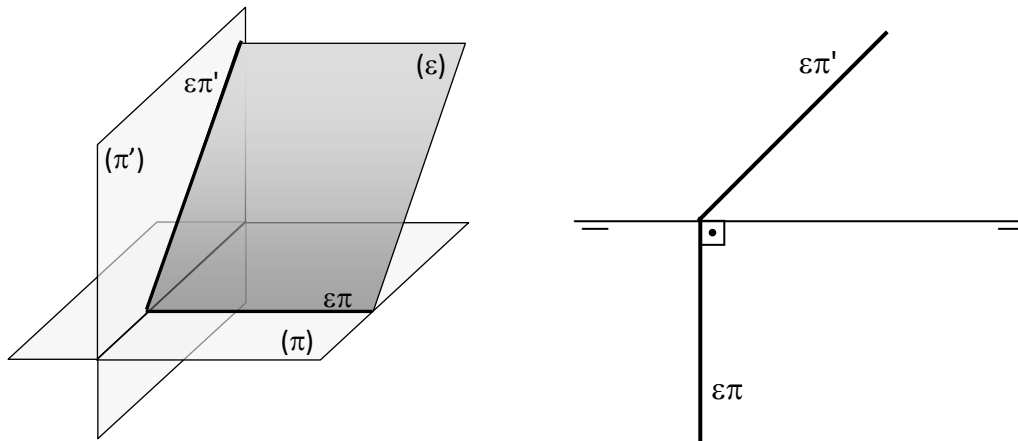


Figura 4.5 – Representação de um plano de Topo no espaço e em é pura

#### 4.2.4 Plano Vertical

Plano Vertical é o plano perpendicular ao plano horizontal de projeção e oblíquo ao plano vertical de projeção. Um plano Vertical possui traço horizontal oblíquo à linha de terra e traço vertical perpendicular a essa mesma linha (Figura 4.6).

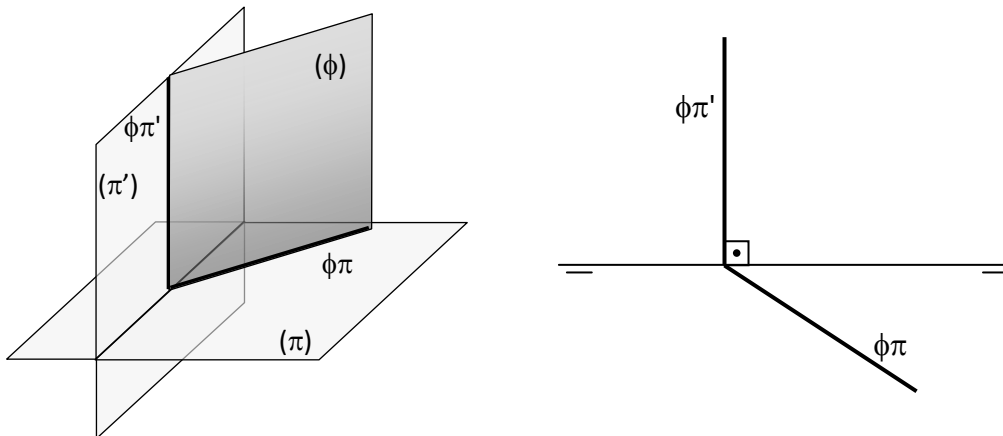


Figura 4.6 – Representação de um plano Vertical no espaço e em é pura

#### 4.2.5 Plano de Perfil

Dá-se o nome de plano de Perfil ao plano perpendicular aos dois planos de projeção. Os traços do plano de Perfil coincidem e são perpendiculares à linha de terra (Figura 4.7). Todos os pontos pertencentes a um determinado plano de Perfil possuem a mesma abscissa.

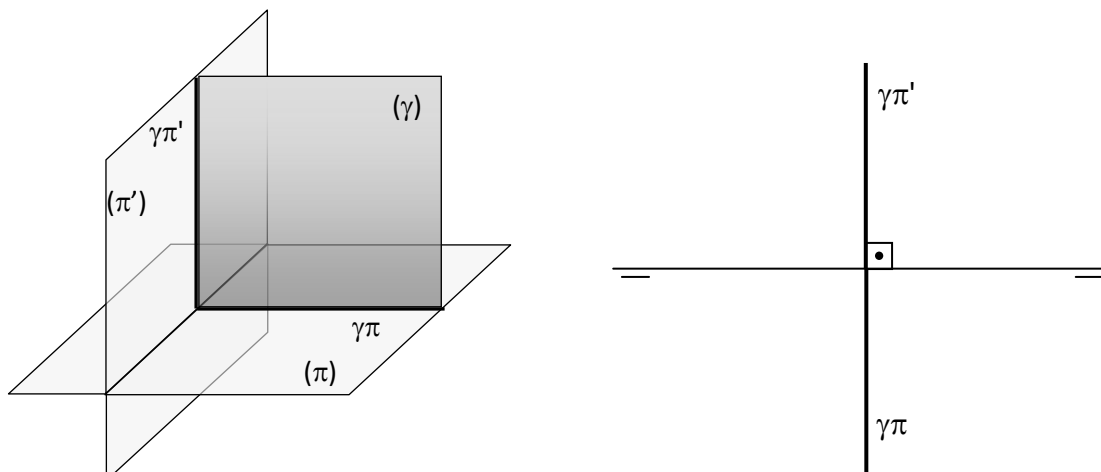


Figura 4.7 – Representação de um plano de Perfil no espaço e em é pura

#### 4.2.6 Plano de Rampa ou plano Paralelo à Linha de Terra

O plano de Rampa é o plano paralelo à linha de terra e oblíquo aos dois planos de projeção. Este tipo de plano apresenta os dois traços paralelos à linha de terra, conforme Figura 4.8.

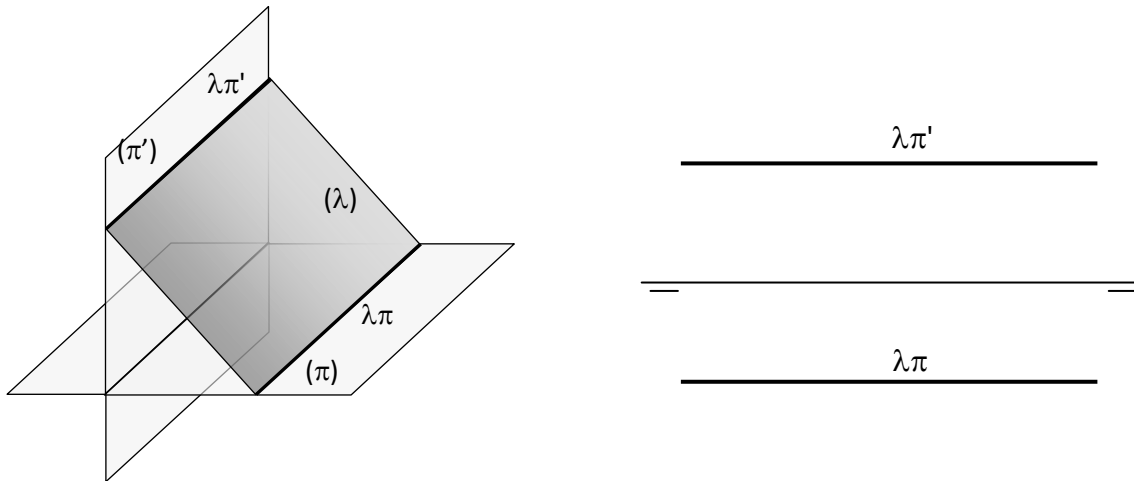


Figura 4.8 – Representação de um plano de rampa no espaço e em é pura

#### 4.2.7 Plano que Passa pela Linha de Terra

É um caso particular do plano de Rampa, quando o plano é oblíquo aos dois planos de projeção e contém a linha de terra. Nesse caso, os dois traços coincidem com essa linha (Figura 4.9). Se a inclinação do plano que Passa pela Linha de Terra não for conhecida, ele só ficará determinado se um outro elemento pertencente a ele (um ponto ou uma reta) for conhecido.

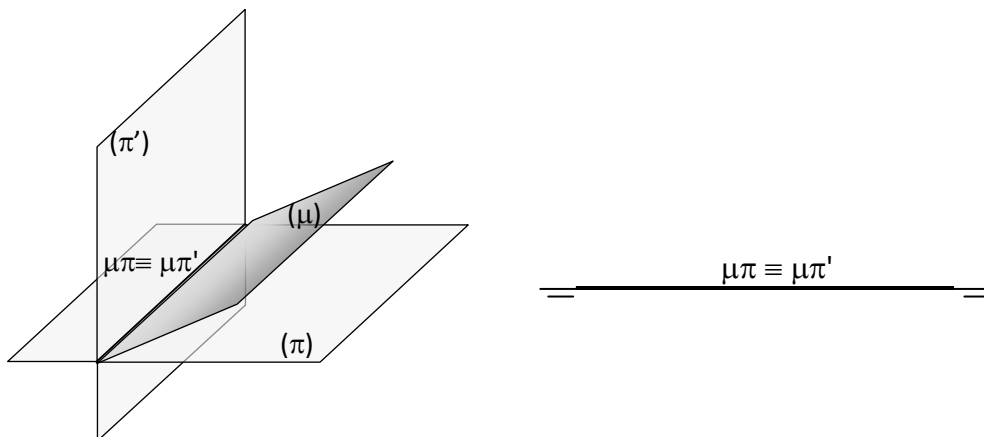


Figura 4.9 – Representação de um plano que Passa pela Linha de Terra no espaço e em é pura

#### 4.2.8 Plano Qualquer

Dá-se o nome de plano Qualquer a todo plano oblíquo aos dois planos de projeção e à linha de terra. Um plano Qualquer possui os dois traços oblíquos à linha de terra (Figura 4.10).

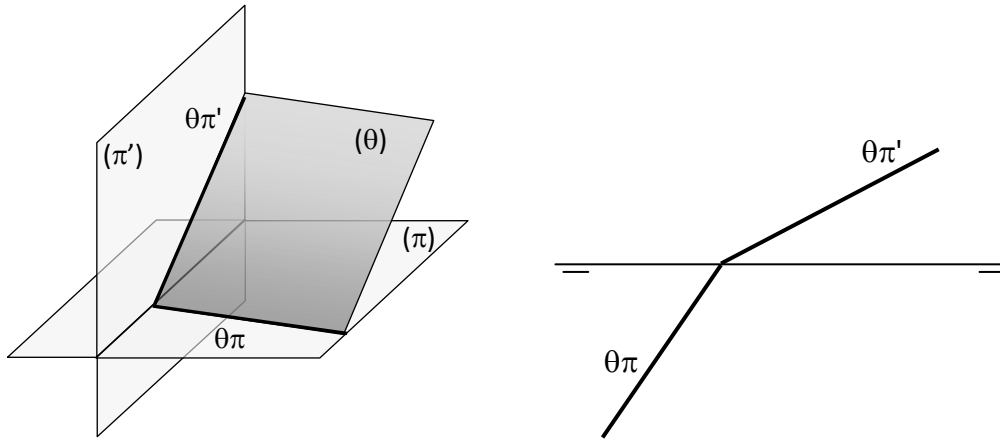


Figura 4.10 – Representação de um plano Qualquer no espaço e em é pura

Sempre que um plano possuir os dois traços e estes não forem paralelos à linha de terra, os mesmos concorrerão com ela em um mesmo ponto, denominado ponto de concurso ou ponto de concorrência dos traços.

### 4.3 PERTINÊNCIA DE RETA E PLANO

Em geral, uma reta pertence a um plano quando os seus traços estão sobre os traços de mesmo nome do plano. Aplicando-se esta regra, percebe-se que a reta ( $r$ ) da Figura 4.11 pertence ao plano ( $\alpha$ ), uma vez que ( $H$ ) está sobre  $\alpha\pi$  e ( $V$ ) está sobre  $\alpha\pi'$ . Por outro lado, a reta ( $s$ ) da Figura 4.12 não pertence ao plano ( $\beta$ ) ainda que ( $V$ ) esteja sobre  $\beta\pi'$ , pois ( $H$ ) não está sobre  $\beta\pi$ .

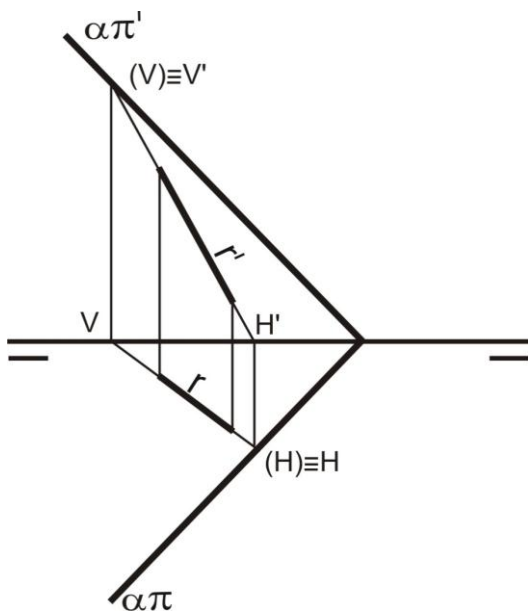


Figura 4.11 – Reta pertencente a plano

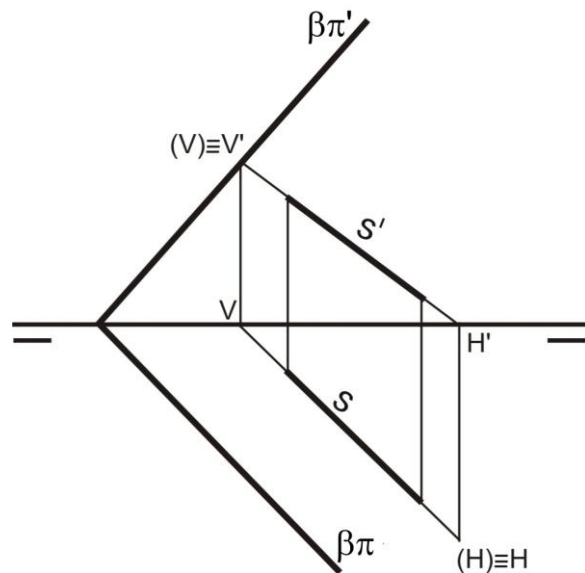


Figura 4.12 – Reta não pertencente a plano

A regra acima não é suficiente para se determinar se uma dada reta pertence a um plano que Passa pela Linha de Terra, pois mesmo que os traços da reta estejam sobre os traços correspondentes do plano, a inclinação da reta pode ser diferente da inclinação do plano. Mais detalhes sobre a pertinência de uma reta a um plano que Passa pela Linha de Terra serão abordados na seção 4.3.1.8.



### 4.3.1 Retas contidas nos planos

Um determinado plano só pode conter certos tipos de retas. Em geral, cada tipo de plano só pode conter três tipos de retas, com exceção do plano qualquer, que pode conter quatro tipos de retas. A seguir, são apresentados os tipos de retas pertencentes a cada tipo de plano.

#### 4.3.1.1 Retas de um plano Qualquer

Como o plano qualquer é oblíquo aos dois planos de projeção, pode conter apenas retas oblíquas aos dois planos ou a pelo menos um dos planos de projeção: Qualquer, Horizontal, Frontal e de Perfil. Quando uma reta Qualquer pertence a um plano Qualquer, seus traços estão sobre os traços de mesmo nome do plano (Figura 4.13).

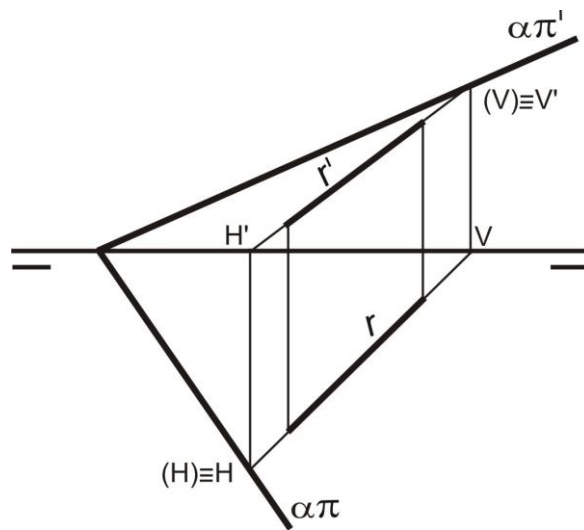


Figura 4.13 – Reta Qualquer pertencente a um plano Qualquer

Quando uma reta Horizontal pertence a um plano Qualquer, seu traço vertical está sobre o traço vertical do plano e sua projeção horizontal é paralela ao traço horizontal do plano (Figura 4.14).

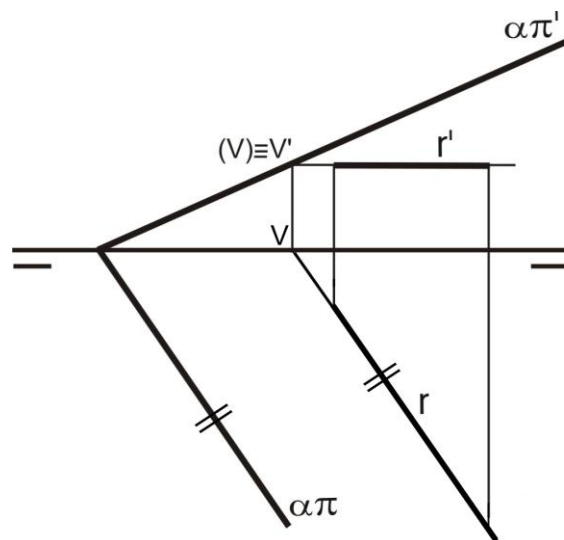


Figura 4.14 – Reta Horizontal pertencente a um plano Qualquer

Quando uma reta Frontal pertence a um plano Qualquer, seu traço horizontal está sobre o traço horizontal do plano e sua projeção vertical é paralela ao traço vertical do plano (Figura 4.15).

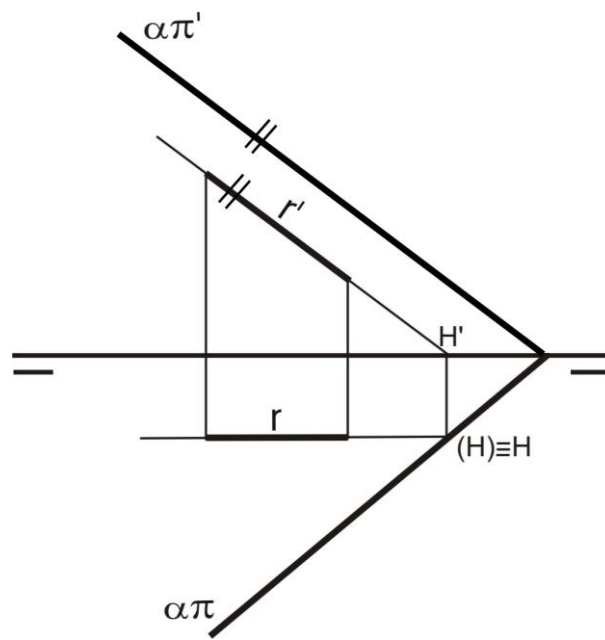


Figura 4.15 – Reta Frontal pertencente a um plano Qualquer

Quando uma reta de Perfil pertence a um plano Qualquer, seus traços estão sobre os traços correspondentes do plano. Para saber se uma reta de Perfil pertence ao plano, é necessário rebater-se a reta de Perfil sobre o plano vertical de projeção para obter-se os traços da mesma (Figura 4.16).

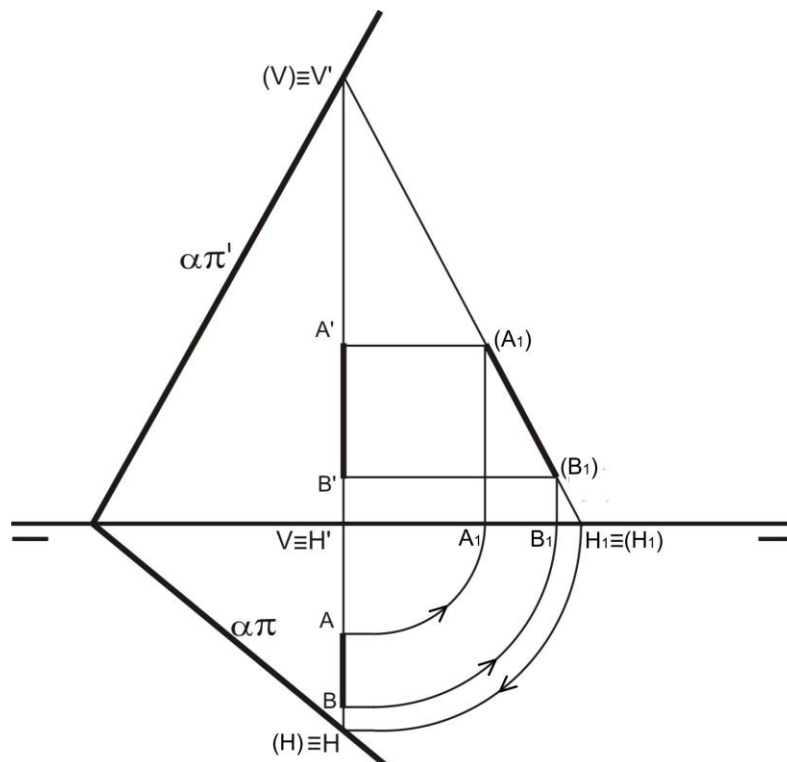


Figura 4.16 – Reta de Perfil pertencente a um plano Qualquer

#### 4.3.1.2 Retas de um plano Horizontal

O plano Horizontal só pode conter retas paralelas ao plano horizontal de projeção: Horizontal, de Topo e Fronto-Horizontal.

Quando uma reta Horizontal ou uma reta de Topo estiver contida em um plano Horizontal, o traço vertical da reta estará sobre o traço vertical do plano e a projeção vertical da reta coincidirá com o traço vertical do plano (Figuras 4.17 e 4.18).

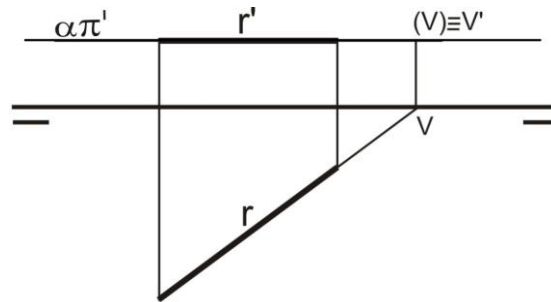


Figura 4.17 – Reta Horizontal pertencente a um plano Horizontal

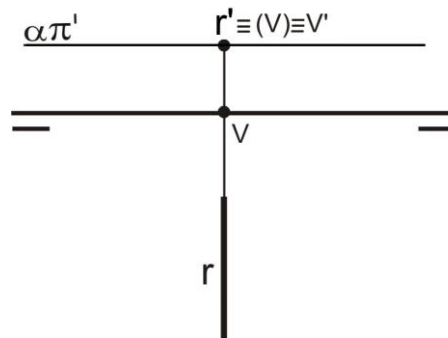


Figura 4.18 – Reta de Topo pertencente a um plano Horizontal

Quando uma reta Fronto-horizontal estiver contida em um plano Horizontal, a projeção vertical da reta coincidirá com o traço vertical do plano (Figura 4.19).

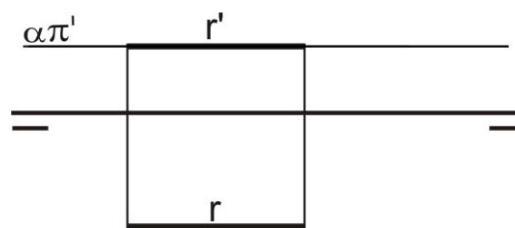


Figura 4.19 – Reta Fronto-horizontal pertencente a um plano Horizontal

#### 4.3.1.3 Retas de um plano Frontal

O plano Frontal só pode conter retas paralelas ao plano vertical de projeção: Frontal, Vertical e Fronto-Horizontal.

Quando uma reta Frontal ou uma reta Vertical estiver contida em um plano Frontal, o traço horizontal da reta estará sobre o traço horizontal do plano e a projeção horizontal da reta coincidirá com o traço horizontal do plano (Figuras 4.20 e 4.21).

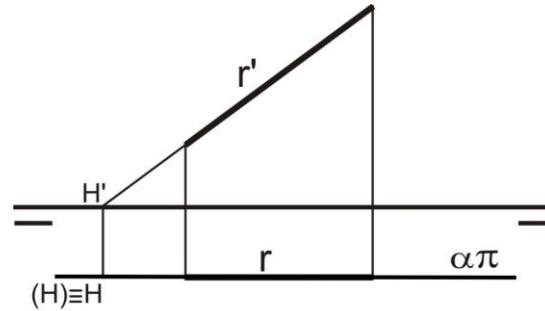


Figura 4.20 – Reta Frontal pertencente a um plano Frontal

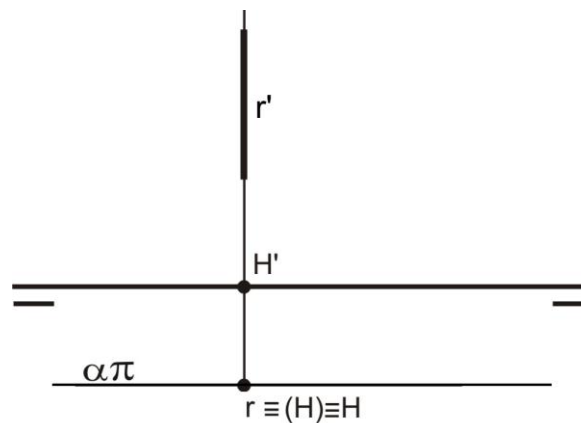


Figura 4.21 – Reta Vertical pertencente a um plano Frontal

Quando uma reta Fronto-horizontal estiver contida em um plano Frontal, a projeção horizontal da reta coincidirá com o traço horizontal do plano (Figura 4.22).

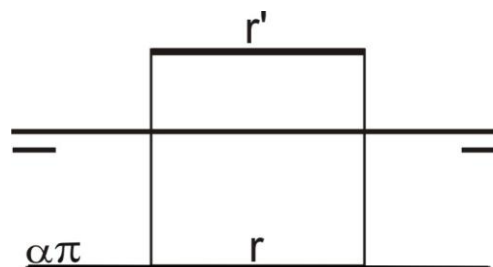


Figura 4.22 – Reta Fronto-horizontal pertencente a um plano Frontal

#### 4.3.1.4 Retas de um plano de Topo

O plano de Topo só pode conter retas que sejam oblíquas ao plano horizontal de projeção ou perpendiculares ao plano vertical de projeção: de Topo, Frontal e Qualquer.

Quando uma reta de Topo estiver contida em um plano de Topo, sua projeção vertical e o seu traço vertical estarão sobre o traço vertical do plano (Figura 4.23).

Quando uma reta Frontal estiver contida em um plano de Topo, sua projeção vertical coincidirá com o traço vertical do plano e o seu traço horizontal estará sobre o traço horizontal do plano (Figura 4.24).

Quando uma reta Qualquer estiver contida em um plano de Topo, sua projeção vertical coincidirá com o traço vertical do plano, seu traço vertical estará sobre o traço vertical do plano e o seu traço horizontal estará sobre o traço horizontal do plano (Figura 4.25).

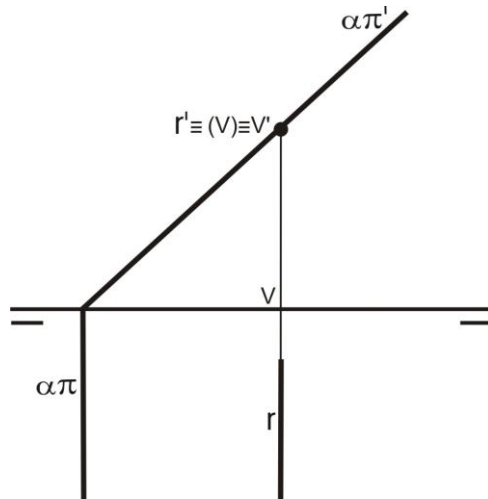


Figura 4.23 – Reta de Topo contida em um plano de Topo

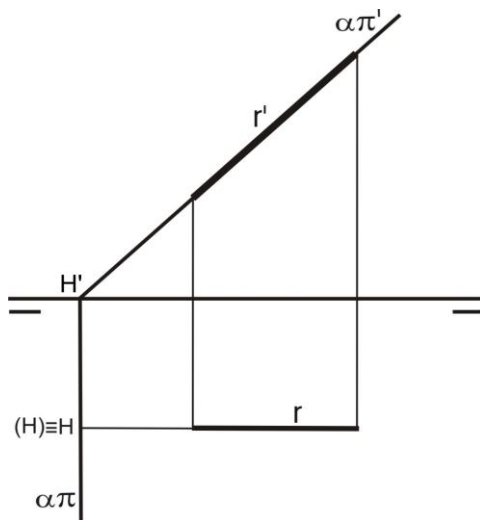


Figura 4.24 – Reta Frontal contida em um plano de Topo

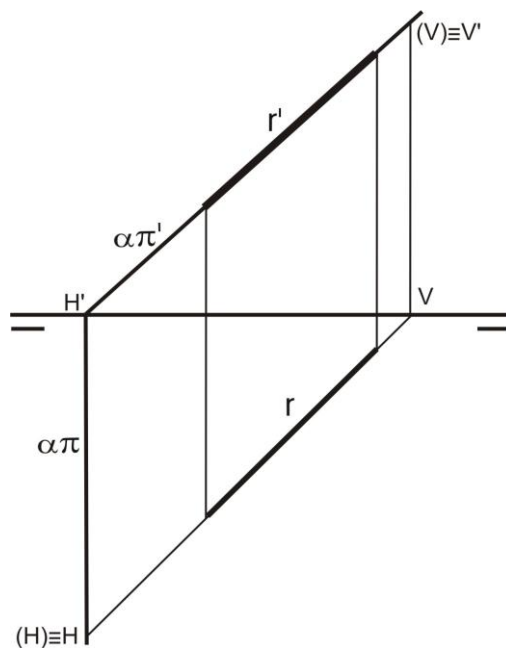


Figura 4.25 – Reta Qualquer contida em um plano de Topo

#### 4.3.1.5 Retas de um plano Vertical

O plano Vertical só pode conter retas que sejam oblíquas ao plano vertical de projeção ou perpendiculares ao plano horizontal de projeção: Vertical, Horizontal ou Qualquer.

Quando uma reta Vertical pertencer a um plano Vertical, sua projeção horizontal e o seu traço horizontal estarão sobre o traço horizontal do plano (Figura 4.26).

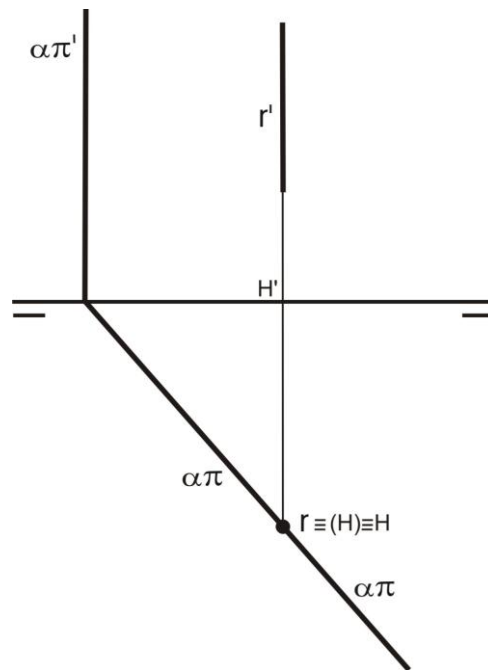


Figura 4.26 – Reta Vertical contida em um plano Vertical

Quando uma reta Horizontal estiver contida em um plano Vertical, sua projeção horizontal coincidirá com o traço horizontal do plano e o seu traço vertical estará sobre o traço vertical do plano (Figura 4.27).

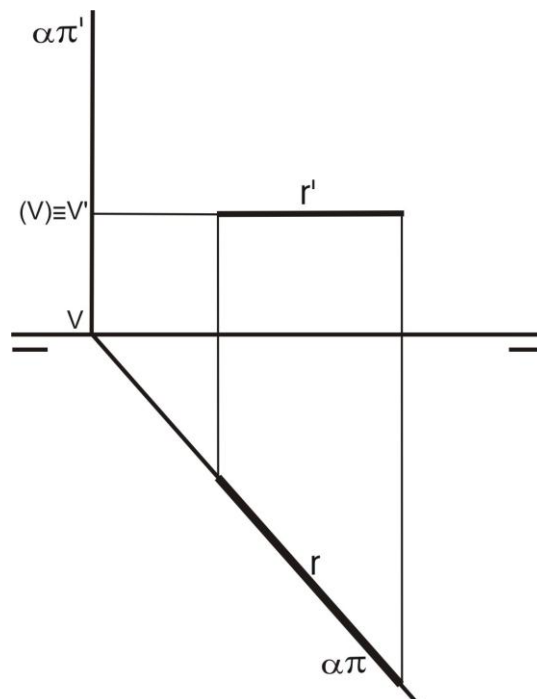


Figura 4.27 – Reta Horizontal contida em um plano Vertical

Quando uma reta Qualquer estiver contida em um plano Vertical, sua projeção horizontal coincidirá com o traço horizontal do plano, seu traço horizontal estará sobre o traço horizontal do plano e o seu traço vertical estará sobre o traço vertical do plano (Figura 4.28).

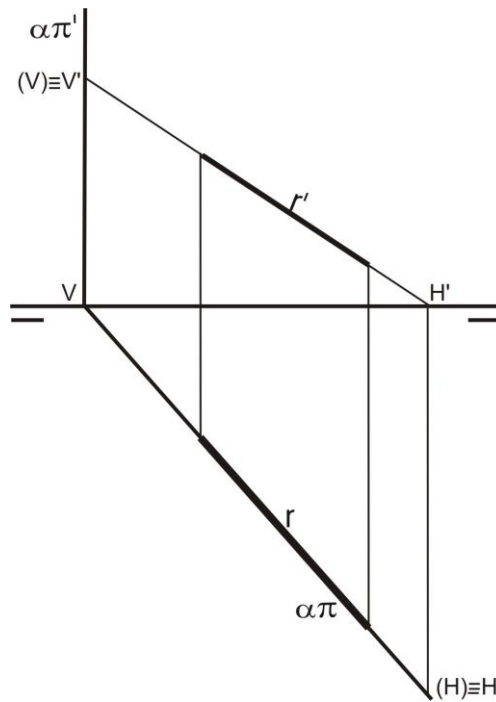


Figura 4.28 – Reta Qualquer contida em um plano Vertical

#### 4.3.1.6 Retas de um plano de perfil

O plano de Perfil só pode conter retas ortogonais à linha de terra: de Perfil, Vertical e de Topo. Quando qualquer um destes tipos de reta pertencer a um dado plano de Perfil, a abscissa da reta será a mesma da reta de Perfil (Figuras 4.29 a 4.31).

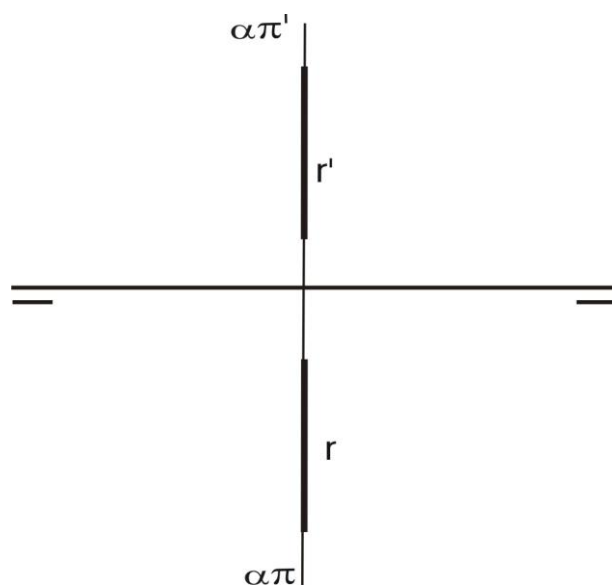


Figura 4.29 – Reta de Perfil pertencente a um plano de Perfil

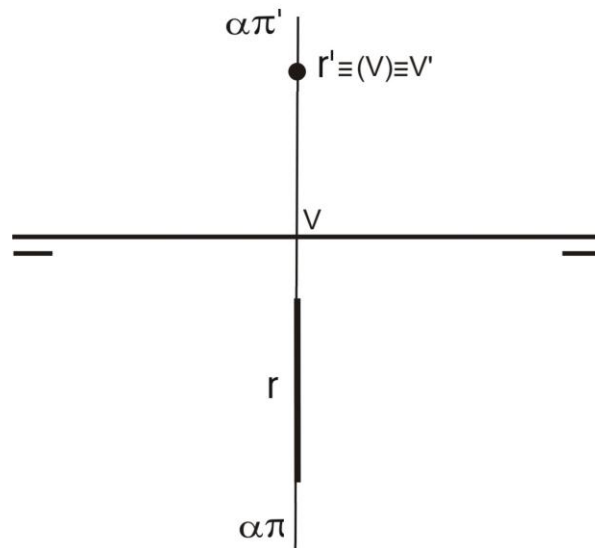


Figura 4.30 – Reta de Topo pertencente a um plano de Perfil

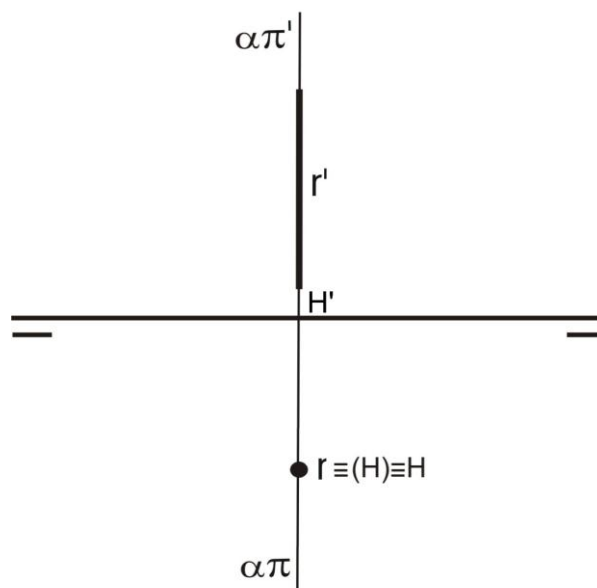


Figura 4.31 – Reta Vertical pertencente a um plano de Perfil

#### 4.3.1.7 Retas de um plano de Rampa

O plano de Rampa só pode conter retas que sejam paralelas à linha de terra ou oblíquas aos dois planos de projeção: de Perfil, Qualquer e Fronto-horizontal.

Quando uma reta de Perfil ou uma reta Qualquer pertence a um plano de Rampa, seus traços estão sobre os traços de mesmo nome do plano (Figuras 4.32 e 4.33). No caso da reta de Perfil, para verificar a sua pertinência a um plano de Rampa é necessário rebatê-la sobre o plano vertical de projeção, obtendo-se os seus traços.



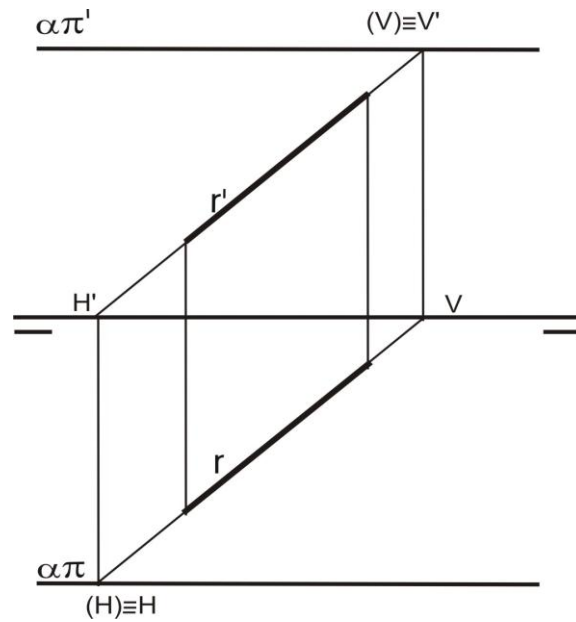


Figura 4.32 – Reta Qualquer pertencente a um plano de Rampa

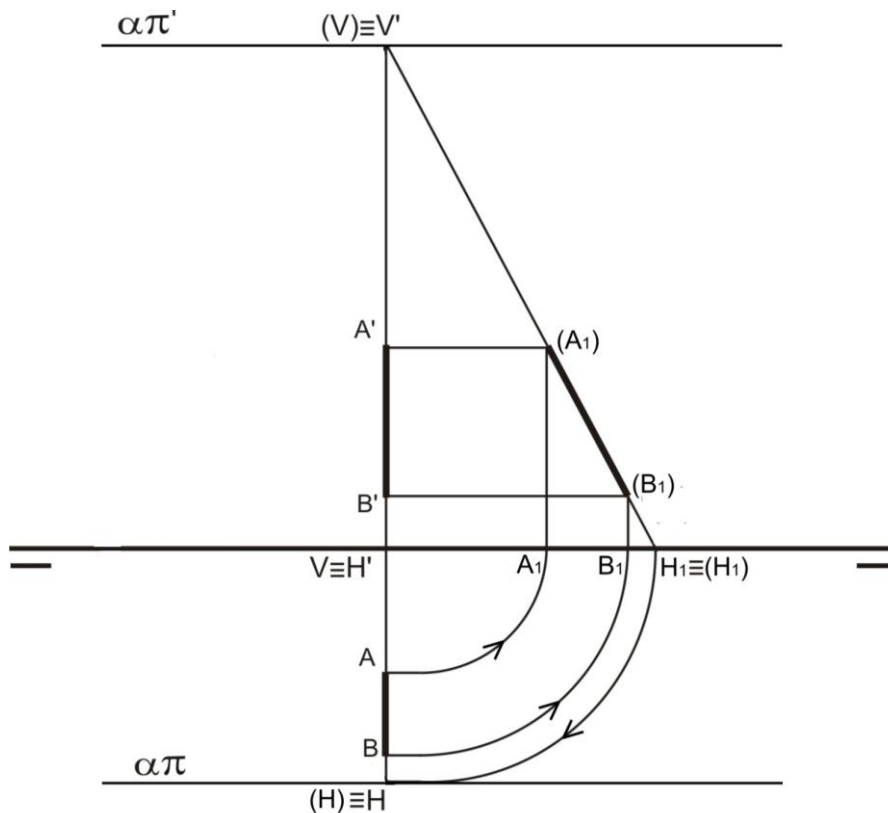


Figura 4.33 – Reta de Perfil pertencente a um plano de Rampa

Para se verificar se uma reta Fronto-horizontal pertence a um dado plano de Rampa, é necessário utilizar-se uma reta auxiliar, já que a reta Fronto-horizontal não tem traços sobre os planos de projeção. Na Figura 4.34, tem-se uma reta Fronto-horizontal ( $r$ ) cuja pertinência a um dado plano de Rampa ( $\alpha$ ) foi provada utilizando-se a reta auxiliar ( $a$ ). Como a reta auxiliar ( $a$ ) pertence ao plano de Rampa e é concorrente com a reta Fronto-horizontal ( $r$ ), esta última também pertence ao plano. Caso as duas retas não fossem concorrentes, a reta ( $r$ ) não pertenceria ao plano.

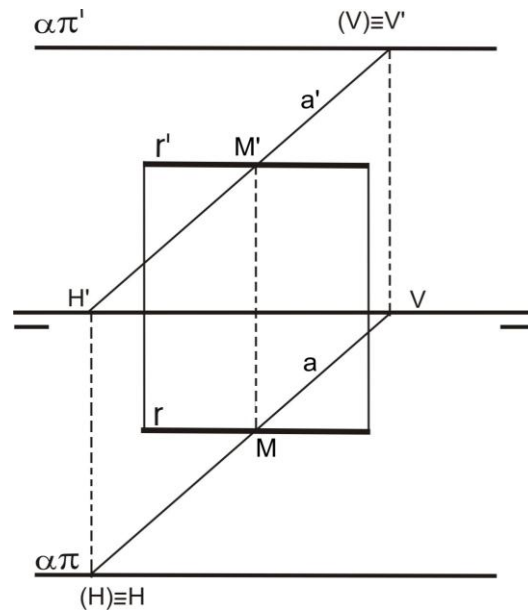


Figura 4.32 – Verificação da pertinência de uma Reta Fronto-horizontal a um plano de Rampa

#### 4.3.1.8 Retas de um plano que Passa pela Linha de Terra

Assim como o plano de Rampa, o plano que Passa pela Linha de Terra só pode conter retas paralelas à linha de terra ou oblíquas aos dois planos de projeção: Fronto-horizontal, Qualquer e de Perfil.

No caso do plano que passa pela linha de terra, a regra geral de pertinência entre reta e plano não é suficiente para se afirmar que uma reta pertence a esse plano. Mesmo que os traços da reta coincidam com os traços do plano, a reta pode não estar contida no plano. Na Figura 4.35, por exemplo, a reta (A)(B) tem seus traços na linha de terra, sobre os traços do plano ( $\alpha$ ), e pertence ao plano. Já a reta (A)(C), que também tem seus traços na linha de terra, sobre os traços do plano ( $\alpha$ ), não pertence a esse plano.

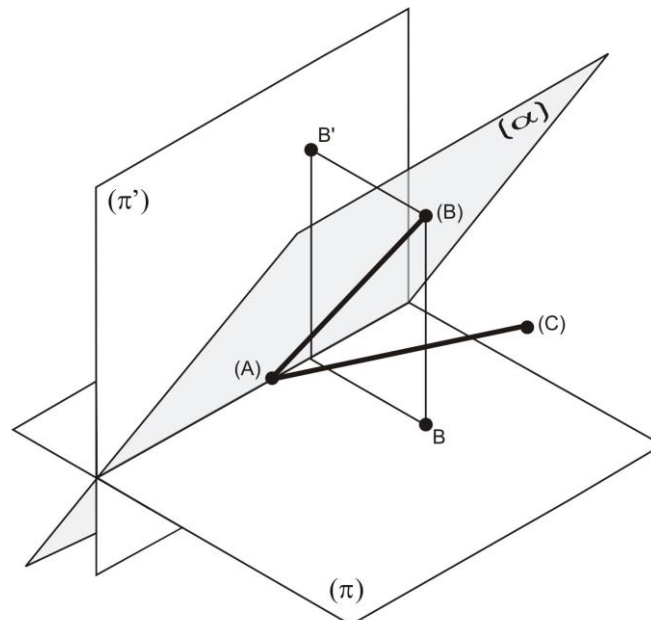


Figura 4.35 – Pertinência de uma reta a um plano que Passa pela Linha de Terra

Só é possível determinar se uma reta pertence a um plano que Passa pela Linha de Terra conhecendo-se uma reta auxiliar do plano. Assim, sempre que se desejar saber se uma reta dada pertence a um plano que Passa pela Linha de Terra, deve-se traçar uma reta auxiliar pertencente ao plano e, posteriormente, verificar se esta é concorrente com a reta dada. Caso haja concorrência, a reta dada pertence ao plano.



## ATIVIDADE PRÁTICA 07

01) As retas (A)(B), de topo, (B)(C), fronto-horizontal, e (A)(C), horizontal, são os três lados de um triângulo retângulo contido em um plano horizontal ( $\alpha$ ). Representar as retas (A)(B), (B)(C) e (A)(C), achar os seus traços e o traço do plano ( $\alpha$ ). Dados:

$$(A) [ 20 ; 40 ; ? ] \quad (B) [ ? ; ? ; 20 ] \quad (C) [ 60 ; 10 ; ? ]$$

02) Determinar os traços da reta qualquer (D)(E) e, posteriormente, fazer passar por ela um plano ( $\beta$ ), vertical. Determinar também as coordenadas de um ponto (F), sabendo-se que (D)(F) é uma reta vertical e (E)(F) é uma reta horizontal, ambas contidas no plano ( $\beta$ ). Dados:

$$(D) [ 30 ; 10 ; 30 ] \quad (E) [ 60 ; 40 ; 10 ]$$

03) Um plano ( $\gamma$ ), qualquer, é definido pela inclinação dos seus traços em relação à L.T. e pelo ponto (J) de concorrência dos seus traços com essa mesma linha. Traçar duas retas, uma reta frontal (G)(T) e uma reta horizontal (T)(I), contidas nesse plano ( $\gamma$ ). Dados:

$$(G) [ 40 ; ? ; 20 ] \quad (T) [ 70 ; ? ; ? ] \quad \gamma \wedge \pi' = + 45^\circ \\ (I) [ 100 ; ? ; ? ] \quad (J) [ 0 ; 0 ; 0 ] \quad \gamma \wedge \pi = - 45^\circ$$

04) Sabe-se que os traços vertical e horizontal de um plano ( $\phi$ ), paralelo à linha de terra, encontram-se, respectivamente, 40 mm acima e 30 mm abaixo desta linha. Deseja-se saber se as retas (K)(L), fronto-horizontal, e (M)(N), de perfil, pertencem a esse plano. Dados:

$$(K) [ 20 ; 10 ; 20 ] \quad (L) [ 50 ; ? ; ? ] \quad (M) [ 70 ; 22,5 ; 10 ] \quad (N) [ ? ; 7,5 ; 30 ]$$

05) Sabe-se que o plano ( $\eta$ ), que passa pela linha de terra, contém o ponto (O). Verificar se as retas (P)(Q) e (R)(S) pertencem ao plano ( $\alpha$ ). Dados:

$$(P) [ -40 ; 12,5 ; 25 ] \quad (R) [ 0 ; 40 ; 30 ] \quad (O) [ 0 ; 10 ; 20 ] \\ (Q) [ -20 ; 7,5 ; 15 ] \quad (S) [ 40 ; 40 ; 30 ]$$

### 4.4 PERTINÊNCIA DE PONTO E PLANO

Como regra geral, um ponto pertence a um plano se pertence a uma reta do plano. Esta regra, que não possui exceção, está baseada na lógica de que todos os pontos de uma reta pertencente a um determinado plano também pertencem a este plano.

A aplicação desta regra não é necessária quando o plano em questão for *projetante*, ou seja, perpendicular a pelo menos um dos planos de projeção. Quando um plano é projetante, a épura indica diretamente se um ponto pertence ao plano. Isso ocorre porque quando um dado plano é perpendicular a um dos planos de projeção, todos os pontos pertencentes a ele são projetados sobre o traço correspondente do plano.

Os planos classificados como projetantes são: Horizontal e De Topo, perpendiculares ao plano horizontal de projeção, Frontal e Vertical, perpendiculares ao plano vertical de projeção, e De Perfil, perpendicular aos dois planos de projeção.

Se o plano projetante for perpendicular ao plano horizontal de projeção (caso dos planos Frontal e Vertical), basta verificar se a projeção horizontal do ponto está sobre o traço horizontal do plano. Na Figura 4.36, o ponto (B) não pertence ao plano Frontal ( $\alpha$ ), enquanto os pontos (A) e (C) pertencem ao plano, pois suas projeções horizontais estão sobre o traço horizontal do plano. Pelo mesmo motivo, os pontos (F) e (G) pertencem ao plano Vertical ( $\beta$ ) da Figura 4.37, enquanto os pontos (D) e (E) não pertencem ao plano porque suas projeções horizontais não estão sobre o traço horizontal do plano ( $\beta$ ).

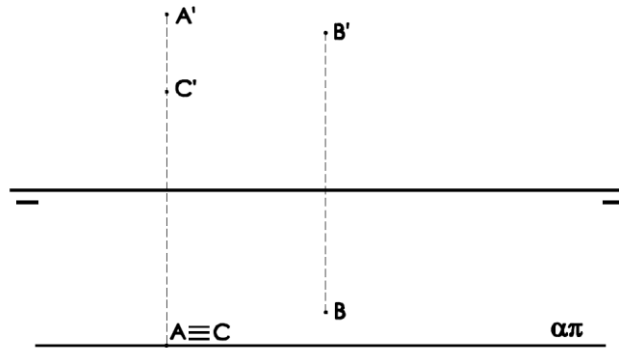


Figura 4.36 – Verificação da pertinência de três pontos a um plano Frontal

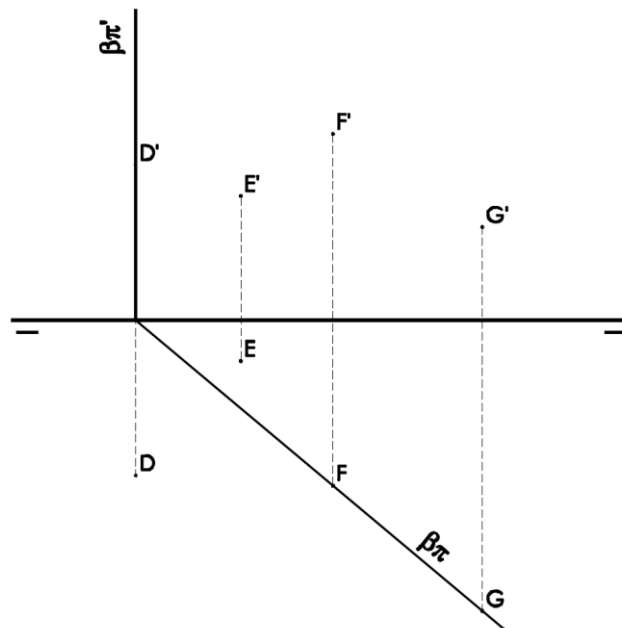


Figura 4.37 – Verificação da pertinência de quatro pontos a um plano Vertical

Se o plano projetante for perpendicular ao plano vertical de projeção (caso dos planos Horizontal e De Topo), basta verificar se a projeção vertical do ponto está sobre o traço vertical do plano. Na Figura 4.38, o ponto (B) não pertence ao plano Horizontal ( $\alpha$ ), enquanto os pontos (A) e (C) pertencem ao plano, pois suas projeções verticais estão sobre o traço vertical do plano. Por este mesmo motivo, os pontos (F) e (G) pertencem ao plano De Topo ( $\beta$ ) da Figura 4.39, enquanto os pontos (D) e (E) não pertencem ao plano porque suas projeções verticais não estão sobre o traço vertical do plano ( $\beta$ ).

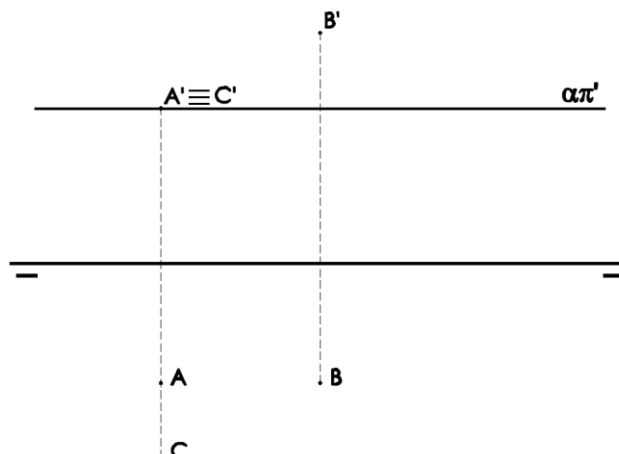


Figura 4.38 – Verificação da pertinência de três pontos a um plano Horizontal

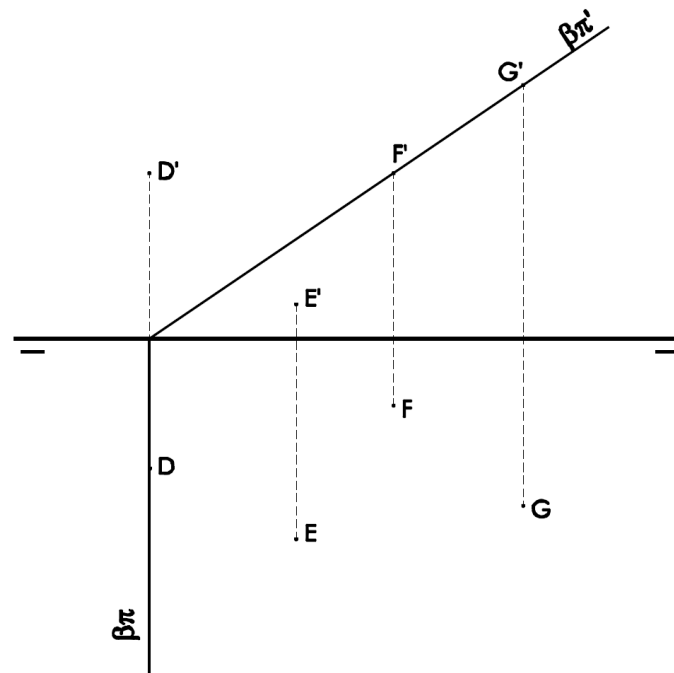


Figura 4.39 – Verificação da pertinência de quatro pontos a um plano De Topo

No caso da pertinência de ponto e plano De Perfil, basta que o ponto possua a mesma abscissa do plano para pertencer a ele. Assim, na Figura 4.40, os pontos (A) e (C) pertencem ao plano De Perfil ( $\alpha$ ), enquanto o ponto (B), que não possui a mesma abscissa do plano, não pertence a ele.

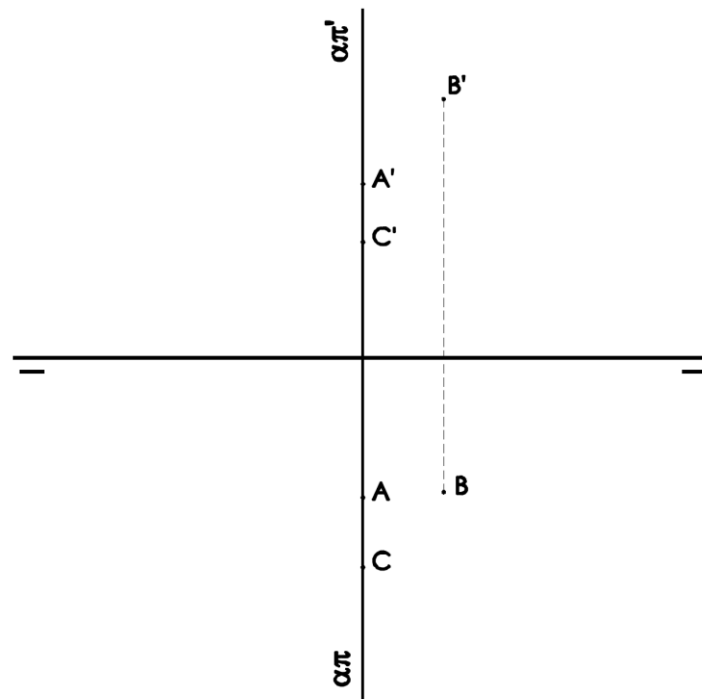


Figura 4.40 – Verificação da pertinência de três pontos a um plano De Perfil

Os planos dos tipos Qualquer, Que Passa pela Linha de Terra e De Rampa são ditos *não projetantes*, por serem oblíquos aos dois planos de projeção. Quando um plano é não projetante, a épura não indica diretamente se um ponto pertence a ele, sendo necessária a aplicação da regra geral de pertinência de ponto e plano.

Para a aplicação da regra geral, deve-se utilizar uma reta auxiliar pertencente ao plano e verificar se o ponto pertence à reta. Traça-se uma das projeções da reta auxiliar passando pela projeção correspondente do ponto. A segunda projeção da reta auxiliar deverá ser traçada de forma que esta pertença ao plano. Se a segunda projeção da reta auxiliar também contiver a projeção correspondente do ponto, este pertencerá à reta e, conseqüentemente, ao plano não projetante dado.

Na Figura 4.41, para realizar-se a verificação da pertinência dos pontos (A) e (B) ao plano Qualquer ( $\alpha$ ), foram utilizadas as retas auxiliares Horizontais (r) e (s) pertencentes ao plano. No caso do ponto (A), traçou-se a projeção vertical da reta (s) pela projeção vertical do ponto. Prolongando-se a projeção vertical da reta auxiliar até o traço vertical do plano, determinou-se a posição do traço vertical da reta. Finalmente, traçou-se a projeção horizontal da reta paralelamente ao traço horizontal do plano, de modo que a reta pertencesse ao plano ( $\alpha$ ). Como a projeção horizontal da reta não intercepta a projeção correspondente do ponto (A), conclui-se que o ponto (A) não pertence à reta (s) e, portanto, não pertence ao plano ( $\alpha$ ). O mesmo procedimento foi adotado para a verificação da pertinência do ponto (B) ao plano ( $\alpha$ ). Como as duas projeções da reta auxiliar (r) passam pelas projeções correspondentes do ponto (B), conclui-se que o ponto (B) pertence à reta (r) e, conseqüentemente, pertence ao plano ( $\alpha$ ).

Outros tipos de retas contidas no plano Qualquer poderiam ter sido utilizados para a realização desta verificação, como as retas do tipo Frontal, Qualquer e De Perfil. Contudo, qualquer que fosse o tipo de reta utilizado, a conclusão obtida seria a mesma.

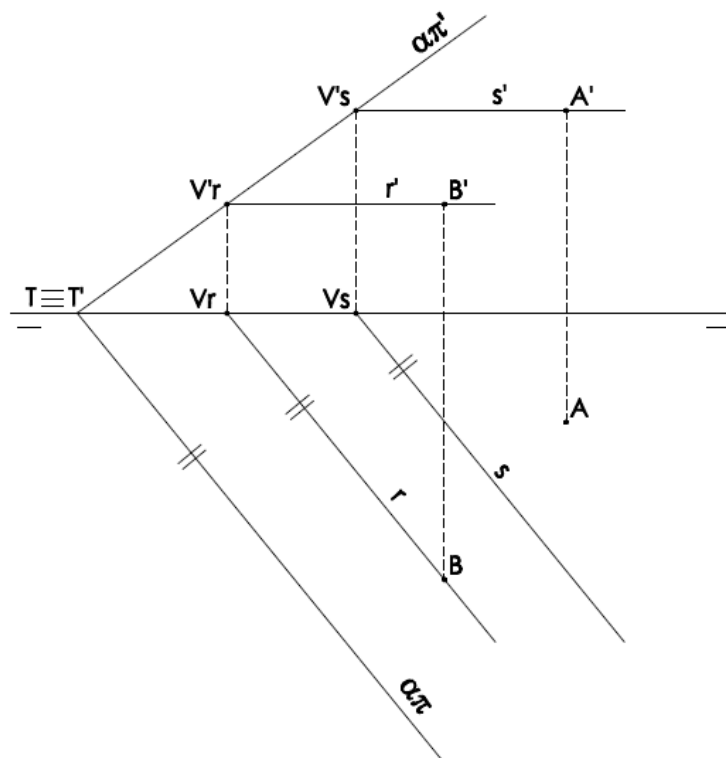


Figura 4.41 – Verificação da pertinência de dois pontos a um plano Qualquer

Na Figura 4.42, utilizou-se uma reta auxiliar (t) para a verificação da pertinência dos pontos (C) e (D) ao plano De Rampa ( $\beta$ ). Traçou-se a projeção horizontal da reta auxiliar pelas projeções horizontais dos pontos (C) e (D), posicionando-se os seus traços sobre os traços correspondentes do plano. Após o posicionamento dos traços da reta auxiliar (t), traçou-se a projeção vertical da reta. Como as projeções da reta auxiliar (t) passam pelas projeções de mesmo nome do ponto (D), conclui-se que o ponto (D) pertence à reta (t) e, conseqüentemente, pertence ao plano ( $\beta$ ). Por outro lado, o ponto (C) não pertence ao plano ( $\beta$ ) por não pertencer à reta auxiliar (t).

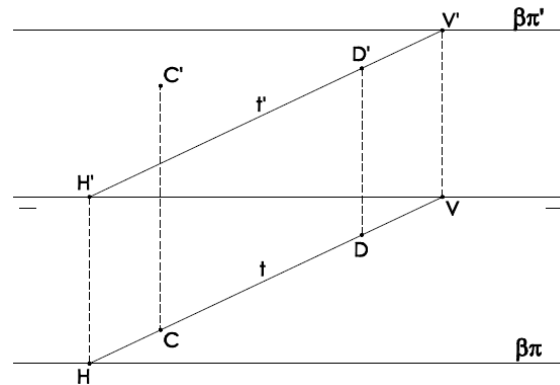


Figura 4.42 – Verificação da pertinência de dois pontos a um plano De Rampa

Quando um determinado ponto possui uma das projeções sobre o traço de mesmo nome de um plano dado e a outra sobre a linha de terra, o ponto pertence ao plano, pois pertence ao traço do plano onde aquela projeção está situada. Nesse caso particular, não é necessária a utilização de uma reta auxiliar do plano para a aplicação da regra geral, pois a simples observação da écura permite inferir se o ponto pertence ou não ao plano dado. Assim, pode-se verificar que os pontos (A) e (B) da Figura 4.43 pertencem ao plano ( $\alpha$ ), mesmo sem a utilização de uma reta auxiliar.

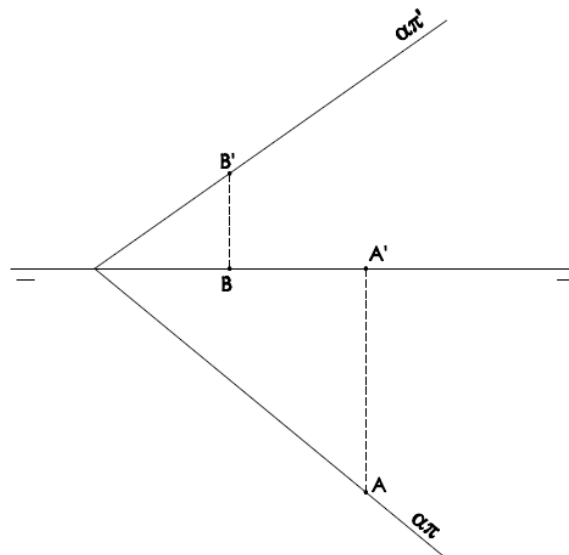


Figura 4.43 – Pontos pertencentes aos traços de um plano Qualquer

#### 4.5 RETAS DE MÁXIMO DECLIVE E MÁXIMA INCLINAÇÃO

Uma reta é considerada de máximo declive de um plano quando forma o maior ângulo possível com o plano horizontal de projeção. Analogamente, uma reta é considerada de máxima inclinação de um plano quando forma o maior ângulo possível com o plano vertical de projeção.

Na Figura 4.44, pode-se afirmar que a reta (s) é de máximo declive do plano Vertical ( $\beta$ ), pois forma o maior ângulo possível com o plano horizontal de projeção (no caso,  $90^\circ$ ). Já a reta (r) é de máxima inclinação do plano ( $\beta$ ), pois forma o maior ângulo possível com o plano vertical de projeção (no caso, um ângulo maior do que  $0^\circ$  e menor do que  $90^\circ$ , igual ao ângulo entre os planos ( $\beta$ ) e ( $\pi'$ )). A écura correspondente é apresentada na Figura 4.45.

Quando um plano é paralelo ao plano horizontal de projeção (caso do plano Horizontal), não possuirá reta de máximo declive, uma vez que todas as retas pertencentes ao plano serão paralelas ao plano horizontal de projeção. Quando um plano é paralelo ao plano vertical de projeção (caso do plano Frontal), não possuirá reta de máxima inclinação, uma vez que todas as retas pertencentes ao plano serão paralelas ao plano vertical de projeção. Os demais planos possuem tanto reta de máximo declive quanto reta de máxima inclinação. Os tipos de retas de máximo declive e de máxima inclinação de cada tipo de plano são apresentados no Quadro 4.1.

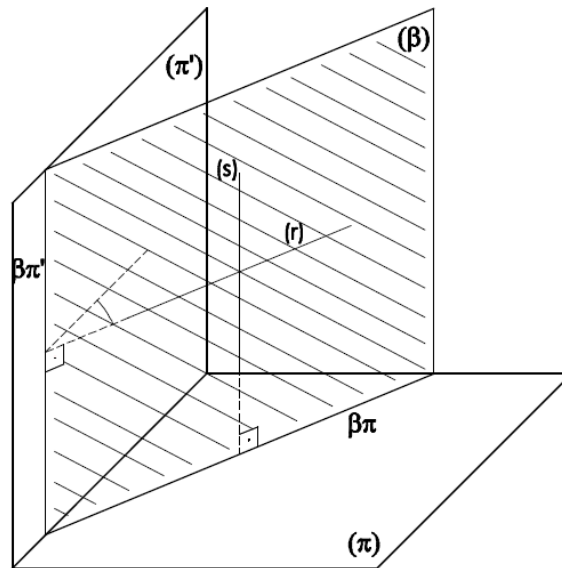


Figura 4.44 – Reta de máximo declive e reta de máxima inclinação de um plano Vertical

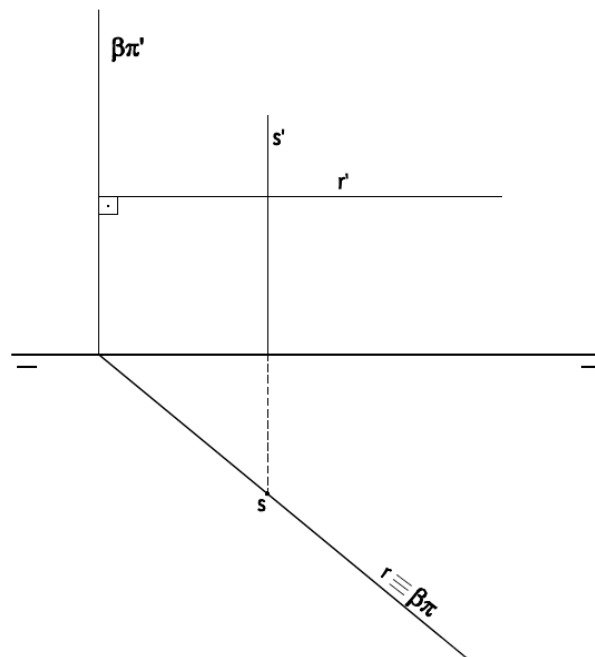


Figura 4.45 – Êpura de uma reta de máximo declive e de uma reta de máxima inclinação de um plano Vertical

Quadro 4.1 - Retas de máximo declive e de máxima inclinação dos diferentes tipos de plano

Tipo de plano	Reta de máximo declive	Reta de máxima inclinação
Horizontal	Não possui	De Topo
Frontal	Vertical	Não possui
De Topo	Frontal	De Topo
Vertical	Vertical	Horizontal
De Perfil	Vertical	De Topo
Qualquer	Qualquer	Qualquer
Que Passa pela Linha de Terra	De Perfil	De Perfil
De Rampa	De Perfil	De Perfil

Ainda que nem sempre o maior ângulo possível da reta com os planos de projeção seja 90°, toda reta de máximo declive de um plano é perpendicular ao traço horizontal desse plano, e toda a reta de



máxima inclinação de um plano é perpendicular ao traço vertical desse plano (Figura 4.44). Por vezes, é possível visualizar este ângulo em épura, como no caso da reta de máxima inclinação do plano ( $\beta$ ) na Figura 4.45, para a qual é possível visualizar o ângulo reto formado entre a sua projeção vertical e o traço vertical do plano ( $\beta$ ).

Quando se trata de um plano Qualquer, sempre é possível visualizar-se o ângulo reto entre a projeção da reta e o traço correspondente do plano. Assim, toda reta de máximo declive de um plano Qualquer possui sua projeção horizontal formando  $90^\circ$  com o traço horizontal do plano (Figura 4.46.(a)). Da mesma forma, toda reta de máxima inclinação de um plano Qualquer apresenta sua projeção vertical formando  $90^\circ$  com o traço vertical do plano (figura 4.46.(b)).

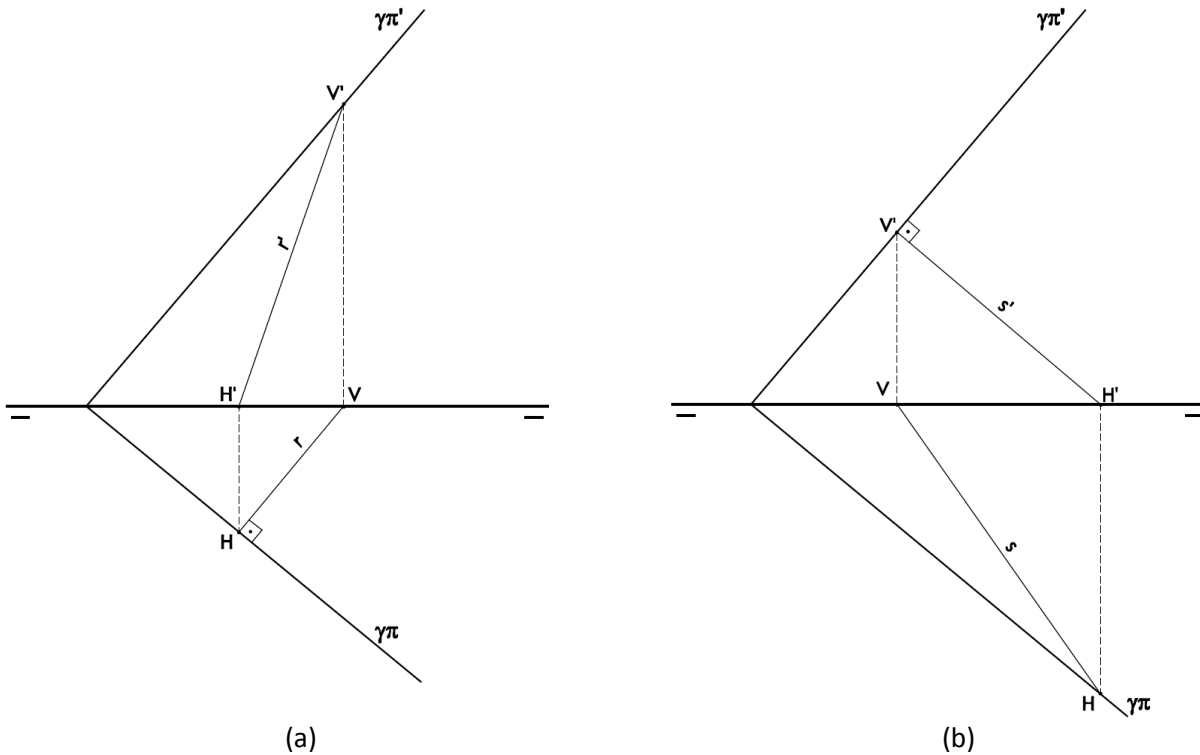


Figura 4.46 – Reta de máximo declive (a) e de máxima inclinação (b) de um plano Qualquer

**ATIVIDADE PRÁTICA 08**

01) Sabe-se que a reta frontal (A)(B) é de máximo declive do plano ( $\alpha$ ). Verificar se os pontos (C), (D) e (E) pertencem ao plano ( $\alpha$ ). Dados:

- |                     |                      |                      |
|---------------------|----------------------|----------------------|
| (A) [ 10 ; ? ; 5 ]  | (B) [ 30 ; 25 ; 15 ] | (C) [ 40 ; 10 ; 20 ] |
| (D) [ 0 ; 10 ; 25 ] | (E) [ 50 ; 0 ; 25 ]  |                      |

02) Sabe-se que a reta (F)(G) é de máximo declive de um plano frontal ( $\beta$ ). Verificar se os pontos (T), (I) e (J) pertencem ao plano ( $\beta$ ). Dados:

- |                      |                      |                        |
|----------------------|----------------------|------------------------|
| (F) [ -10 ; ? ; 10 ] | (G) [ ? ; 25 ; 30 ]  | (T) [ 15 ; -20 ; -25 ] |
| (I) [ 30 ; 25 ; 0 ]  | (J) [ 45 ; 25 ; 30 ] |                        |

03) Sabe-se que a reta (K)(L) é de máximo declive e de máxima inclinação do plano ( $\gamma$ ), paralelo à linha de terra. Verificar se os pontos (M) e (N) pertencem ao plano ( $\gamma$ ). Dados:

- |                     |                    |                      |                       |
|---------------------|--------------------|----------------------|-----------------------|
| (K) [ 0 ; 10 ; 20 ] | (L) [ ? ; 25 ; 5 ] | (M) [ 40 ; 30 ; 30 ] | (N) [ -25 ; 15 ; 15 ] |
|---------------------|--------------------|----------------------|-----------------------|

04) A reta (P)(Q), qualquer, é de máxima inclinação do plano ( $\phi$ ). Verificar se os pontos (R) e (S) pertencem ao plano ( $\phi$ ). Dados:

- |                      |                      |                      |                       |
|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| (P) [ 30 ; 10 ; 25 ] | (Q) [ 60 ; 40 ; 10 ] | (R) [ 50 ; 30 ; 15 ] | (S) [ 100 ; 56 ; 50 ] |
|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|

#### 4.6 ELEMENTOS GEOMÉTRICOS QUE DEFINEM UM PLANO

Para que um plano fique bem definido, é necessário que sejam conhecidos:

- a) duas retas concorrentes do plano;
- b) duas retas paralelas do plano;
- c) uma reta e um ponto exterior a ela, ambos pertencentes ao plano; ou
- d) três pontos não colineares pertencentes ao plano.

Conhecendo-se apenas uma reta do plano, não é possível obter os traços desse plano, pois uma reta pode estar contida em infinitos planos. Contudo, conhecendo-se pelo menos duas retas do plano, pode-se definir a direção dos traços do plano, bastando, para tanto, que sejam determinados os traços das duas retas. Os casos (c) e (d) podem ser reduzidos ao caso (a) ou no caso (b), como será visto mais adiante.

Para se determinar os traços de um plano conhecendo-se duas retas concorrentes do plano, basta que sejam determinados os traços das duas retas. Unindo-se os traços verticais das duas retas, tem-se o traço vertical do plano. Unindo-se os traços horizontais das duas retas, tem-se o traço horizontal do plano (Figura 4.47).

Para se determinar os traços de um plano conhecendo-se duas retas paralelas do plano, procede-se da mesma forma que para duas retas concorrentes. Determinam-se os traços das duas retas e unem-se os traços de mesmo nome, dando origem ao traço vertical e ao traço horizontal do plano (Figura 4.48).

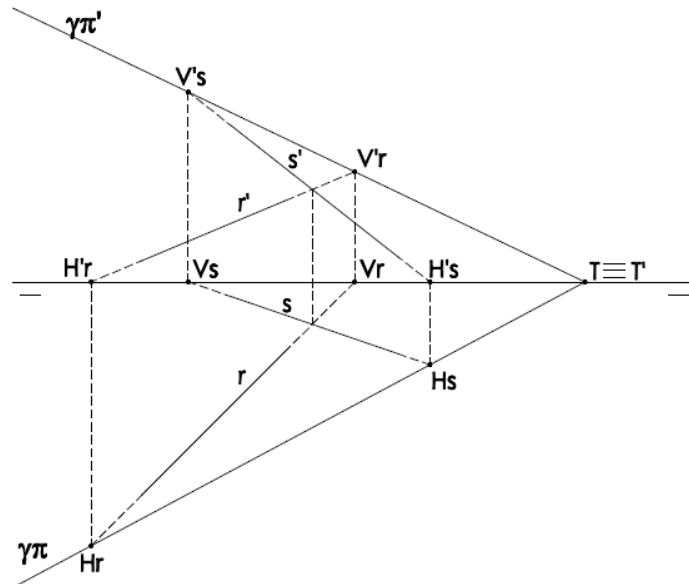


Figura 4.47 – Plano definido pelas retas concorrentes (r) e (s)

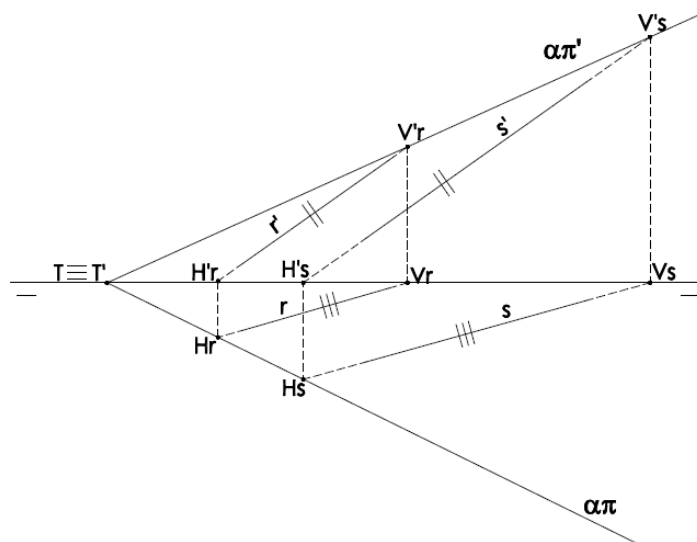


Figura 4.48 – Plano definido pelas retas paralelas (r) e (s)

Quando são conhecidos uma reta e um ponto exterior a ela, ambos pertencentes ao plano, pode-se traçar uma reta auxiliar do plano a partir do ponto dado, concorrente ou paralela à reta conhecida, recaído-se, respectivamente, no caso (a) ou no caso (b). Na Figura 4.49, tem-se uma reta ( $r$ ) e um ponto ( $A$ ) pertencentes a um plano ( $\alpha$ ). Para se determinar os traços do plano ( $\alpha$ ) que contém esses dois elementos, basta que seja traçada uma reta ( $A$ )( $B$ ) concorrente com a reta ( $r$ ). Posteriormente, determina-se a posição dos traços das duas retas que, unidos, possibilitarão a determinação dos traços do plano ( $\alpha$ ).

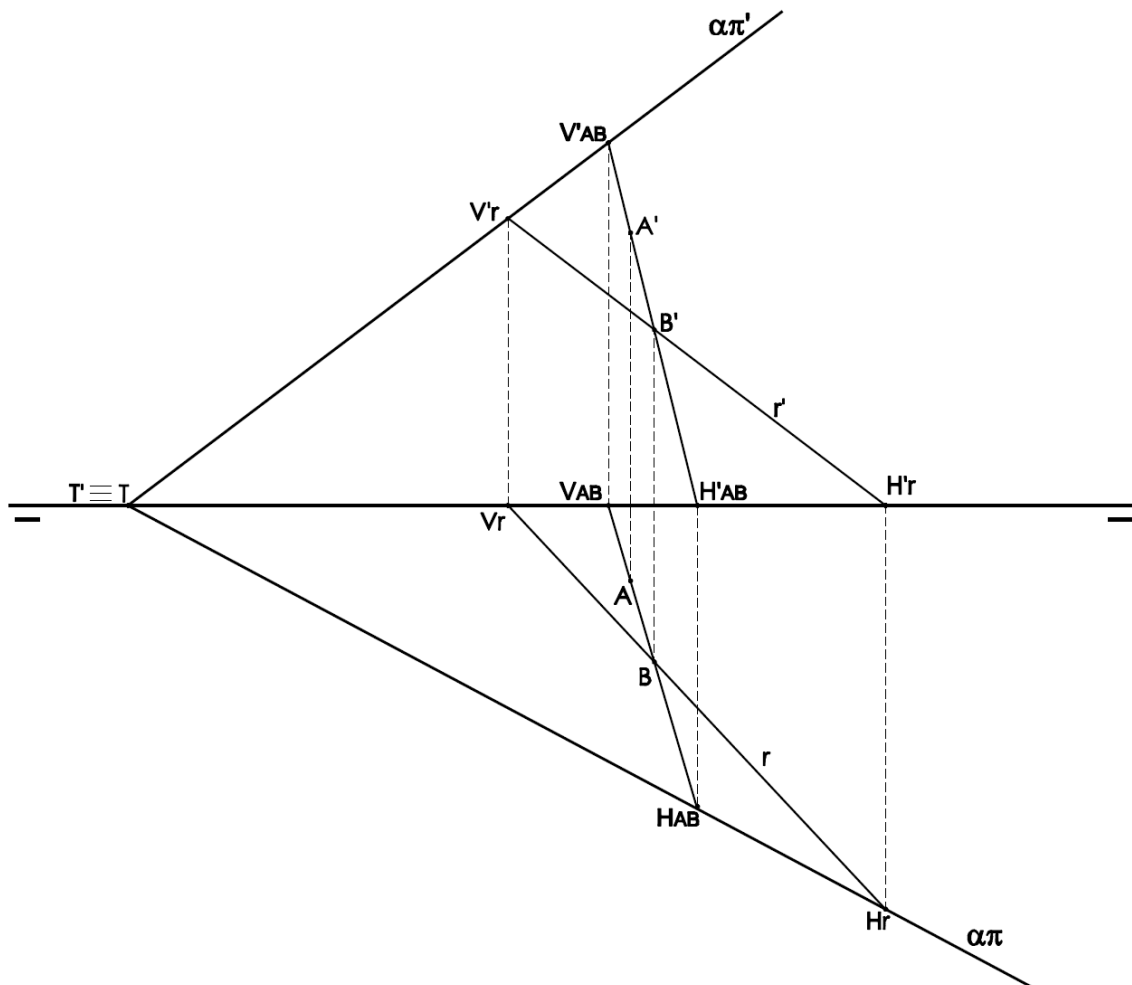


Figura 4.49 – Plano definido por uma reta e um ponto exterior a ela

No caso (d), quando são conhecidos três pontos não colineares do plano, deve-se traçar, pelos pontos, duas retas concorrentes ou duas retas paralelas. Optando-se por duas retas concorrentes, um dos pontos pode ser utilizado como ponto de concorrência e os outros dois como extremos dos segmentos. Optando-se por duas retas paralelas, dois pontos podem ser utilizados para gerar um segmento de reta, passando-se pelo terceiro ponto uma reta paralela a esse segmento. Na Figura 4.50, o plano ( $\beta$ ) definido pelos três pontos não colineares ( $C$ ), ( $D$ ) e ( $E$ ) foi traçado com a utilização das retas paralelas ( $D$ )( $E$ ) e ( $s$ ), sendo que ( $s$ ) foi traçada pelo ponto ( $C$ ). Determinando-se os traços das duas retas, obtêm-se os traços do plano definido pelos pontos ( $C$ ), ( $D$ ) e ( $E$ ).

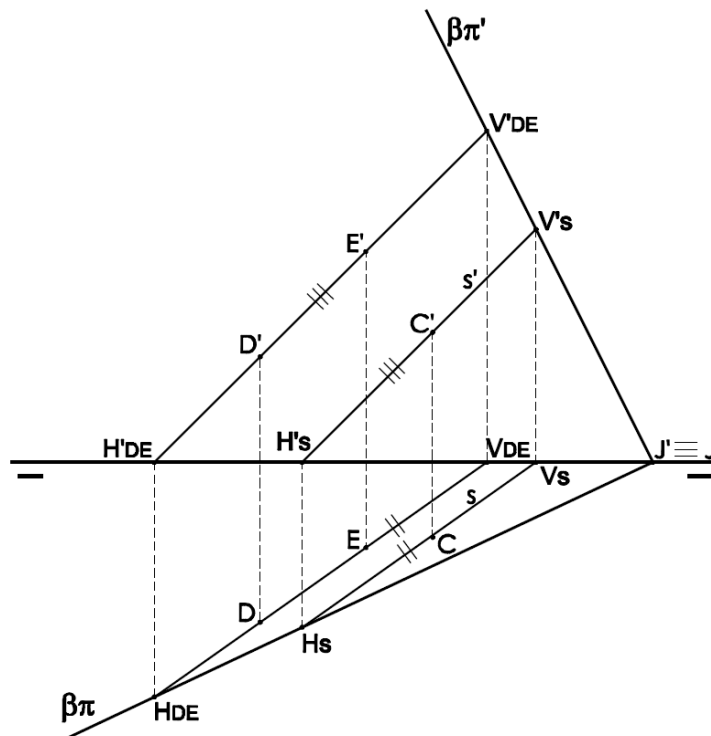


Figura 4.50 – Plano definido por três pontos não colineares

#### 4.6.1 Retas contidas em planos não definidos por seus traços

É possível traçar retas de um plano sem conhecer os seus traços. Para tanto, basta que sejam conhecidos os elementos geométricos que definem o plano dado. Assim, conhecendo-se, por exemplo, duas retas concorrentes de um plano, pode-se traçar uma terceira reta desse plano. Para pertencer ao plano, é preciso que esta terceira reta seja concorrente com as duas retas conhecidas.

Na Figura 4.51, as retas concorrentes ( $r$ ) e ( $s$ ) definem um plano cujos traços não foram determinados. Mesmo assim, é possível afirmar que a reta Horizontal ( $A$ )( $B$ ) pertence a esse plano, uma vez que ela é concorrente com a reta ( $r$ ) no ponto ( $A$ ) e com a reta ( $s$ ) no ponto ( $B$ ).

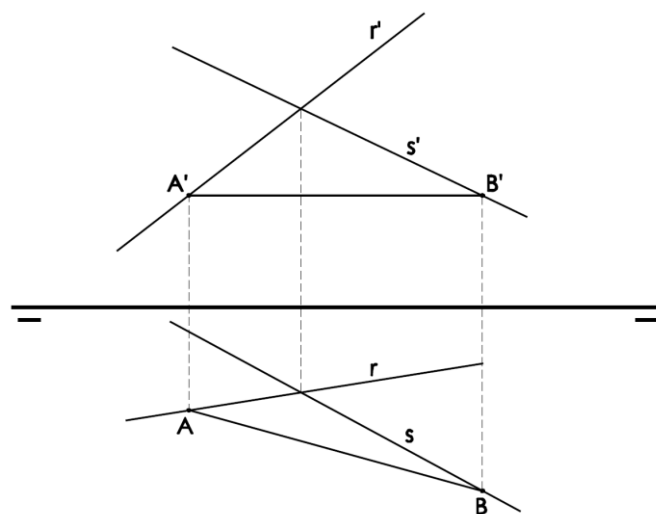


Figura 4.51 – Reta Horizontal de um plano definido por duas retas concorrentes

Na Figura 4.52, a reta Frontal (C)(D) pertence ao plano definido pelas retas paralelas (t) e (u) por estar apoiada nas duas retas, isto é, por ser concorrente com a reta (t) no ponto (C) e com a reta (u) no ponto (D).

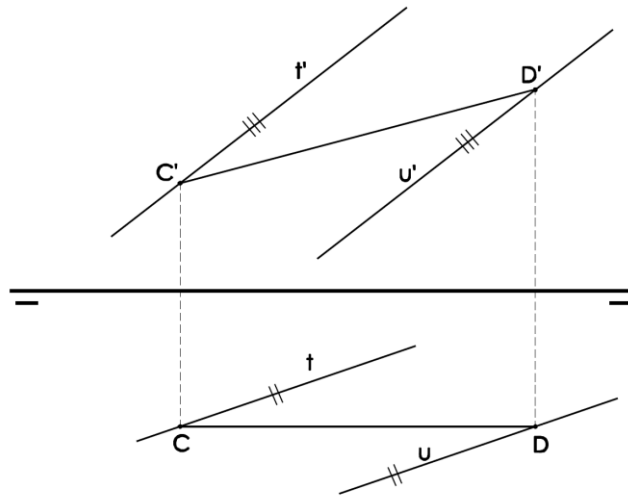


Figura 4.52 – Reta Frontal de um plano definido por duas retas paralelas

Na Figura 4.53, o plano definido pelas retas concorrentes (r) e (s) também contém as retas (A)(B), Qualquer, e (C)(D), de Perfil, porque estas são concorrentes com (r) e (s).

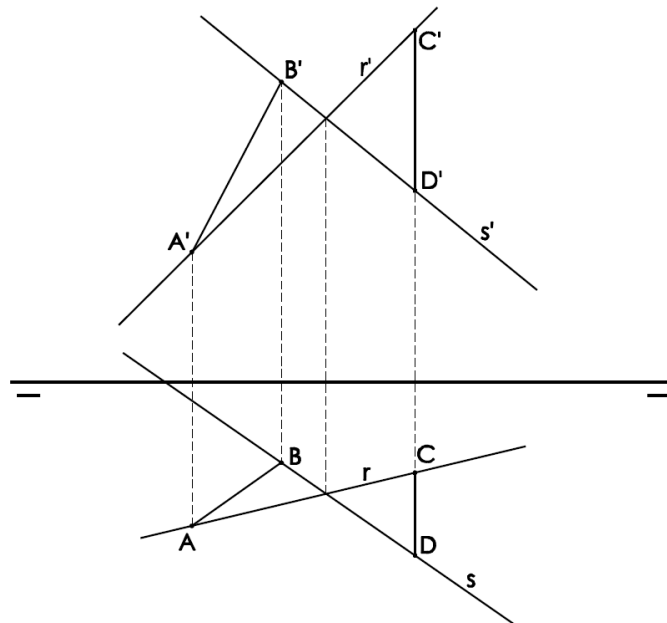


Figura 4.53 – Reta Qualquer e reta de Perfil pertencentes a um plano definido por duas retas concorrentes

#### 4.6.2 Planos definidos por suas retas de máximo declive ou de máxima inclinação

Quando só uma reta de máximo declive de um plano Qualquer é conhecida, é possível obter-se qualquer reta Horizontal pertencente ao plano sem que os traços desse plano sejam determinados. Isso é viável porque todas as retas horizontais de um plano Qualquer são paralelas ao traço horizontal do plano. Consequentemente, as retas horizontais desse plano terão projeção horizontal perpendicular à projeção horizontal de qualquer reta de máximo declive desse plano. Assim, para se traçar uma reta Horizontal (s) pertence ao plano Qualquer cuja reta de máximo declive é a reta Qualquer (r), basta que a projeção horizontal de (s) seja perpendicular à projeção horizontal de (r) e que estas duas retas sejam concorrentes (Figura 4.54).

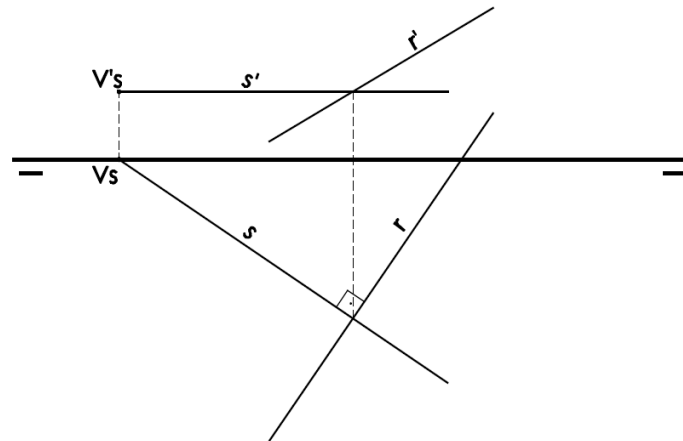


Figura 4.54 – Reta Horizontal pertencente a um plano Qualquer definido por sua reta de máximo declive

Analogamente, todas as retas frontais de um plano Qualquer são paralelas ao traço vertical do plano. Conseqüentemente, as retas frontais desse plano terão projeção vertical perpendicular à projeção vertical de qualquer reta de máxima inclinação desse plano. Assim, para se traçar uma reta Frontal ( $s$ ) pertence ao plano Qualquer cuja reta de máxima inclinação é a reta Qualquer ( $t$ ), basta que a projeção vertical de ( $s$ ) seja perpendicular à projeção vertical de ( $t$ ) e que estas duas retas sejam concorrentes (Figura 4.55).

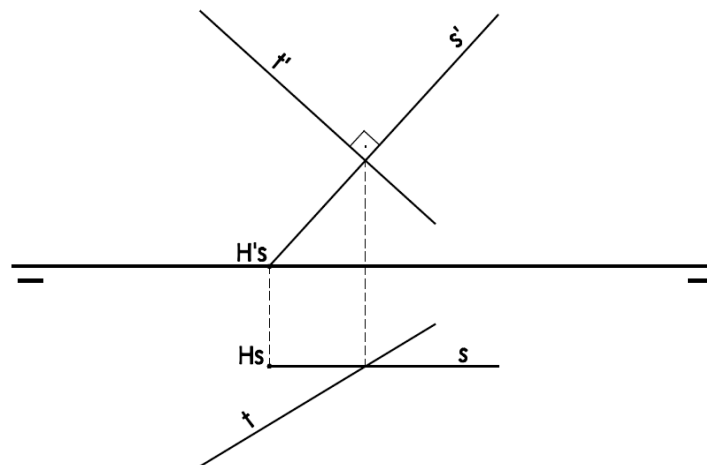


Figura 4.55 – Reta Frontal pertencente a um plano Qualquer definido por sua reta de máxima inclinação

Quando se deseja determinar os traços de um plano Qualquer definido por uma reta de máximo declive ou de máxima inclinação sem que os traços dessa reta sejam determinados, podem ser utilizadas duas retas auxiliares. Se o plano for definido por uma reta de máximo declive, basta que sejam traçadas duas retas horizontais do plano (conforme procedimento apresentado na Figura 4.54) e que os seus traços verticais sejam determinados. Se o plano for definido por uma reta de máxima inclinação, obtêm-se duas retas frontais do plano (conforme procedimento apresentado na Figura 4.55) e determinam-se os seus traços horizontais.

Na Figura 4.56, o plano Qualquer ( $\alpha$ ), do qual se conhecia a reta de máximo declive ( $r$ ), foi determinado a partir do traçado das suas retas horizontais ( $s$ ) e ( $t$ ). Após a obtenção dos traços verticais das duas retas horizontais, determinou-se o traço vertical do plano. A partir do ponto de concurso dos traços, e sabendo-se que as projeções horizontais das retas ( $s$ ) e ( $t$ ) são paralelas ao traço horizontal do plano ( $\alpha$ ), foi possível determinar o traço horizontal do plano e completar a sua representação.

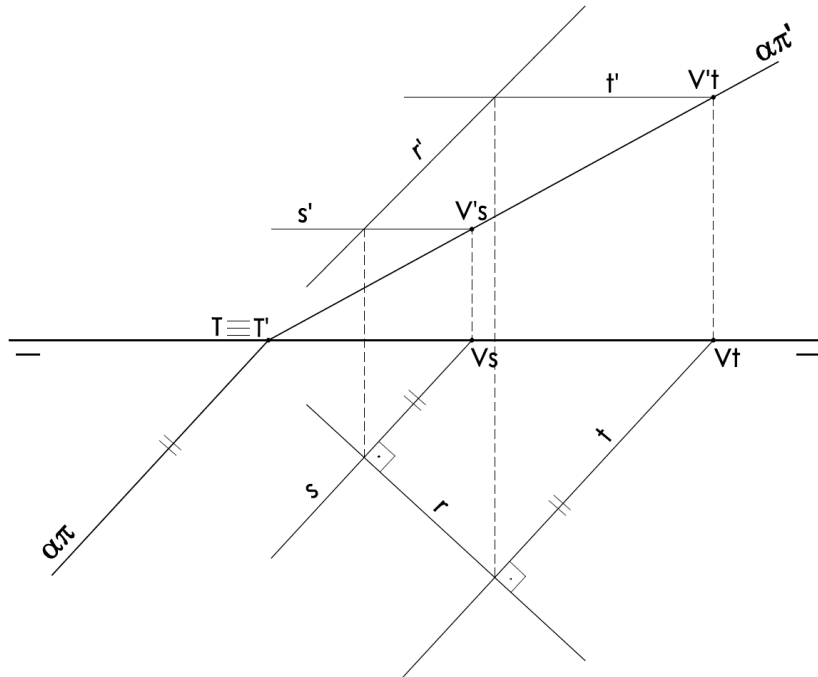


Figura 4.56 – Obtenção dos traços de um plano Qualquer a partir de duas retas horizontais

### ATIVIDADE PRÁTICA 09

- 01) Determinar os traços de um plano ( $\alpha$ ) definido por duas retas paralelas (A)(B) e (C)(D). Dados:  
 (A) [ -20 ; 40 ; 10 ]      (B) [ 5 ; 10 ; 30 ]      (C) [ 0 ; 25 ; 10 ]      (D) [ 45 ; ? ; ? ]
- 02) Determinar os traços do plano ( $\beta$ ) definido pela reta (E)(F) e pelo ponto (G). Dados:  
 (E) [ 20 ; 10 ; 30 ]      (F) [ 50 ; 30 ; 10 ]      (G) [ 60 ; 0 ; 20 ]
- 03) Determinar os traços de um plano ( $\gamma$ ) dado por duas retas concorrentes, uma (T)(I), qualquer, e outra (I)(J), de perfil, sem utilizar rebatimento. Dados:  
 (T) [ 10 ; 30 ; 0 ]      (I) [ 40 ; 0 ; 40 ]      (J) [ ? ; 15 ; 10 ]
- 04) Traçar uma horizontal (K)(L) e uma qualquer (M)(N) do plano definido pelas retas paralelas (P)(Q) e (R)(S), sem determinar os traços do plano. Dados:  
 (K) [ 20 ; ? ; ? ]      (L) [ ? ; ? ; ? ]      (M) [ 50 ; ? ; ? ]      (N) [ 30 ; ? ; ? ]  
 (P) [ 0 ; 60 ; 10 ]      (Q) [ 50 ; 10 ; 40 ]      (R) [ 40 ; 65 ; 5 ]      (S) [ 90 ; ? ; ? ]

## 4.7 INTERSECÇÃO DE RETAS E PLANOS

### 4.7.1 Intersecção de planos

Dois planos podem ser paralelos ou secantes. Enquanto dois planos paralelos não se interceptam, dois planos secantes se interceptam e sua intersecção sempre gera uma reta. Na Figura 4.57(a), os planos  $(\varepsilon)$  e  $(\phi)$  são secantes e a sua intersecção é a reta  $(i)$ , enquanto os planos  $(\gamma)$  e  $(\mu)$  não se interceptam porque são paralelos.

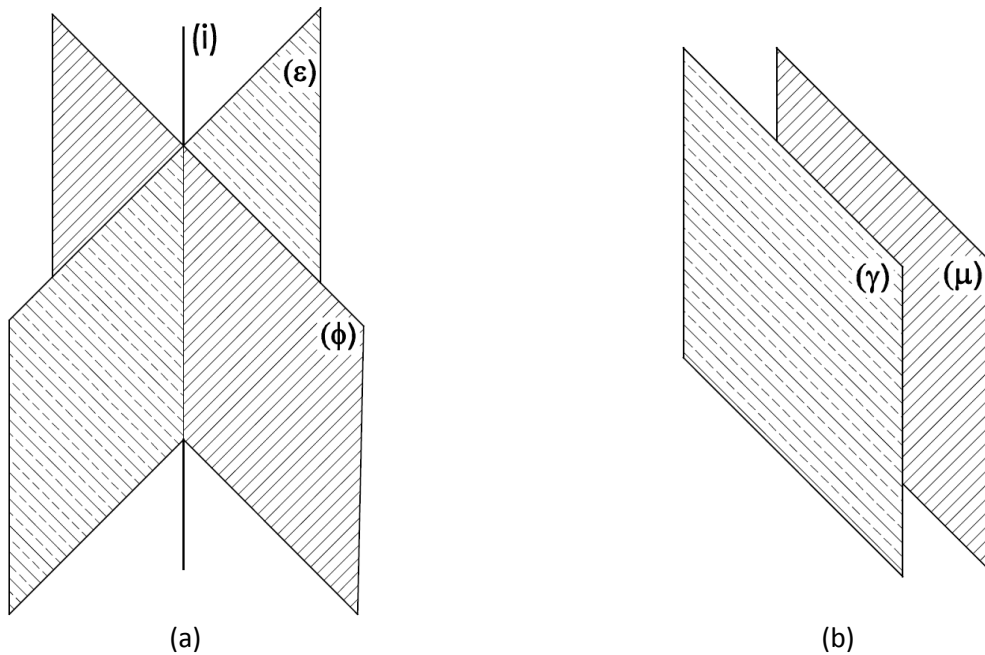


Figura 4.57 – Posições entre dois planos: (a) secantes e (b) paralelos

A reta formada pela intersecção de dois planos secantes nada mais é do que uma reta que pertence, simultaneamente, aos dois planos. Na verdade, a reta intersecção é a única reta comum a dois planos secantes. Conforme a regra de pertinência de reta e plano, uma reta pertence a um plano quando os seus traços estão sobre os traços de mesmo nome do plano. Assim, a reta formada pela intersecção de dois planos deve ter seus traços sobre os traços de mesmo nome dos dois planos secantes. Em outras palavras, os traços da reta intersecção encontram-se na intersecção dos traços de mesmo nome dos dois planos secantes.

Na Figura 4.58, o traço vertical da reta  $(i)$ , formada pela intersecção dos planos secantes  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , está localizado na intersecção dos traços verticais dos dois planos, enquanto o traço horizontal da reta  $(i)$  está localizado na intersecção dos traços horizontais dos dois planos. A écura correspondente é apresentada na Figura 4.59, onde as projeções da reta  $(i)$  foram obtidas após a determinação das projeções dos seus traços.

Quando dois planos secantes não se interceptam no 1º diedro, normalmente é necessário prolongar os traços dos dois planos para obter-se a reta intersecção (Figura 4.60). Em alguns casos, entretanto, os traços não se encontram mesmo que sejam prolongados, pois os dois planos secantes possuem traços horizontais ou verticais paralelos.

Quando os traços horizontais ou verticais dos dois planos secantes são paralelos, a reta intersecção possui apenas um traço. Se os traços horizontais são paralelos, a reta não possui traço horizontal. Se os traços verticais são paralelos, a reta não possui traço vertical. Assim, se dois planos secantes do tipo Qualquer têm traços horizontais paralelos, a reta intersecção não possui traço horizontal e é do tipo Horizontal (Figura 4.61(a)). Se, por outro lado, dois planos secantes do tipo Qualquer têm traços verticais paralelos, a reta intersecção não possui traço vertical e é do tipo Frontal (Figura 4.61(b)).



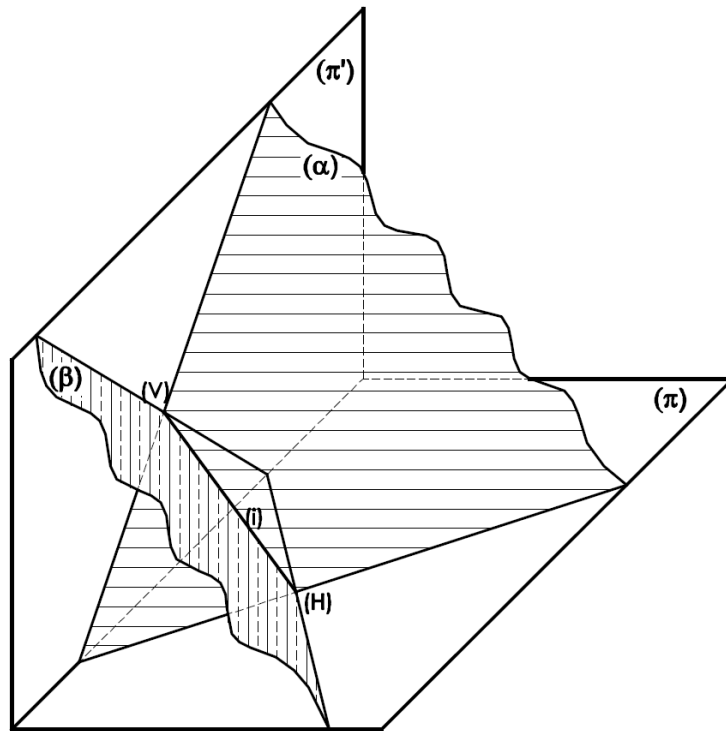


Figura 4.58 – Determinação dos traços da reta formada pela interseção de dois planos

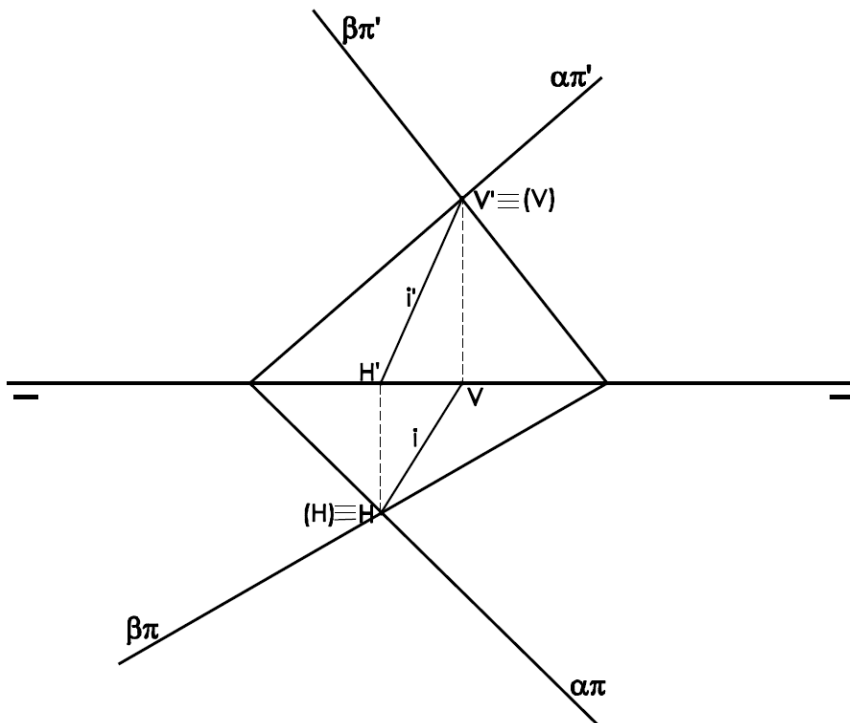


Figura 4.59 – Determinação das projeções da reta formada pela interseção de dois planos

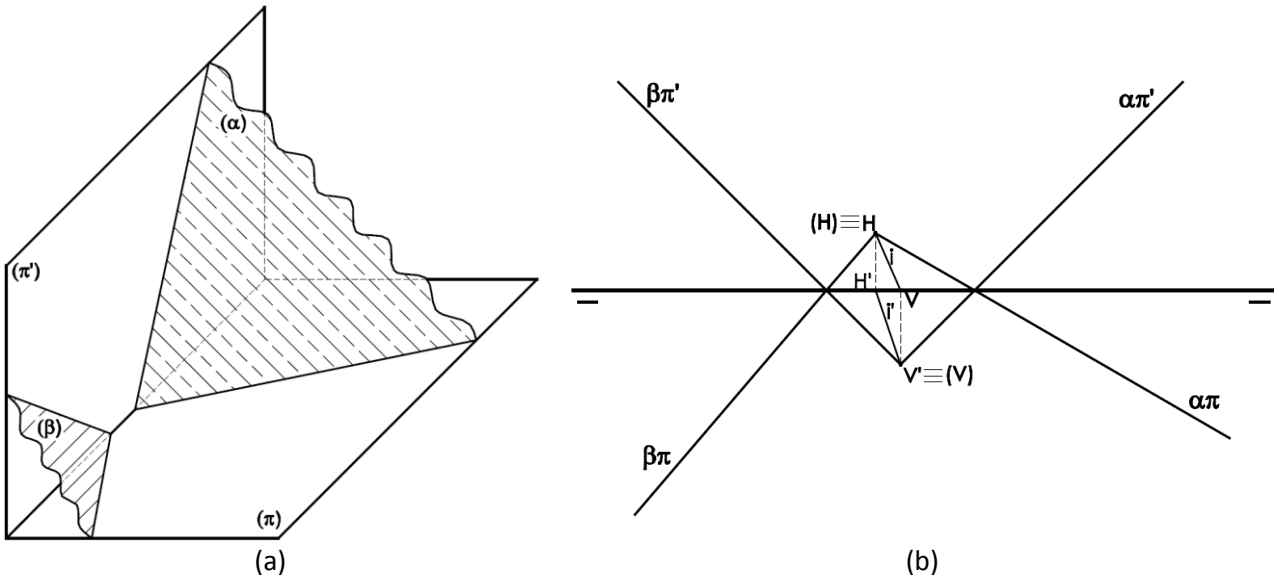


Figura 4.60 – Planos que não se interceptam no 1º diedro: (a) intersecção no espaço e (b) em épura

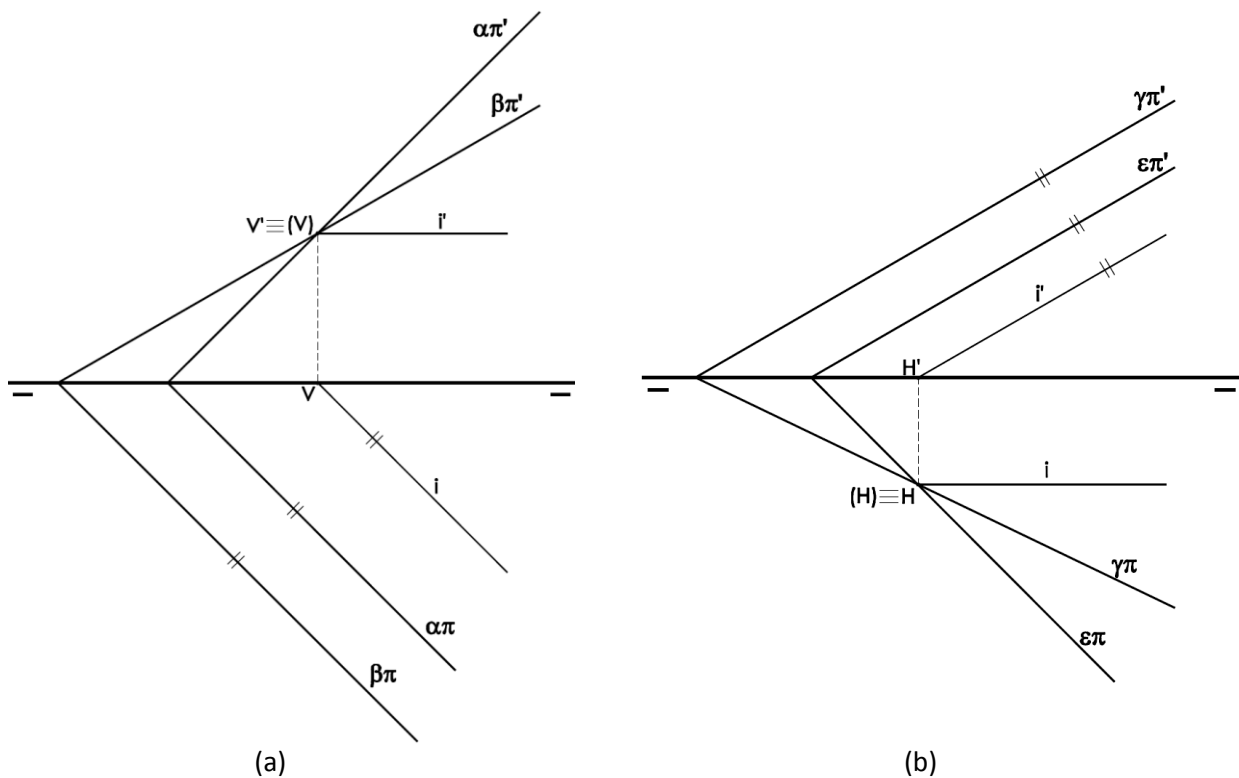


Figura 4.61 – Intersecção de dois planos Quaisquer com traços horizontais (a) e traços verticais (b) paralelos

Quando dois planos de Topo se interceptam, a reta originada não possui traço horizontal, pois o traço horizontal de um plano de Topo sempre é perpendicular à linha de terra e, portanto, os traços horizontais de dois planos de Topo secantes são sempre paralelos. Conforme a Figura 4.62(a), a intersecção de dois planos de Topo é uma reta de Topo, que tem projeção horizontal paralela aos traços horizontais dos dois planos secantes.

Da mesma forma, quando dois planos Verticais se interceptam, a reta originada não possui traço vertical, pois os traços verticais de dois planos Verticais secantes são sempre paralelos. Conforme a Figura 4.62(b), a intersecção de dois planos Verticais é uma reta Vertical, que tem projeção vertical paralela aos traços verticais dos dois planos secantes.

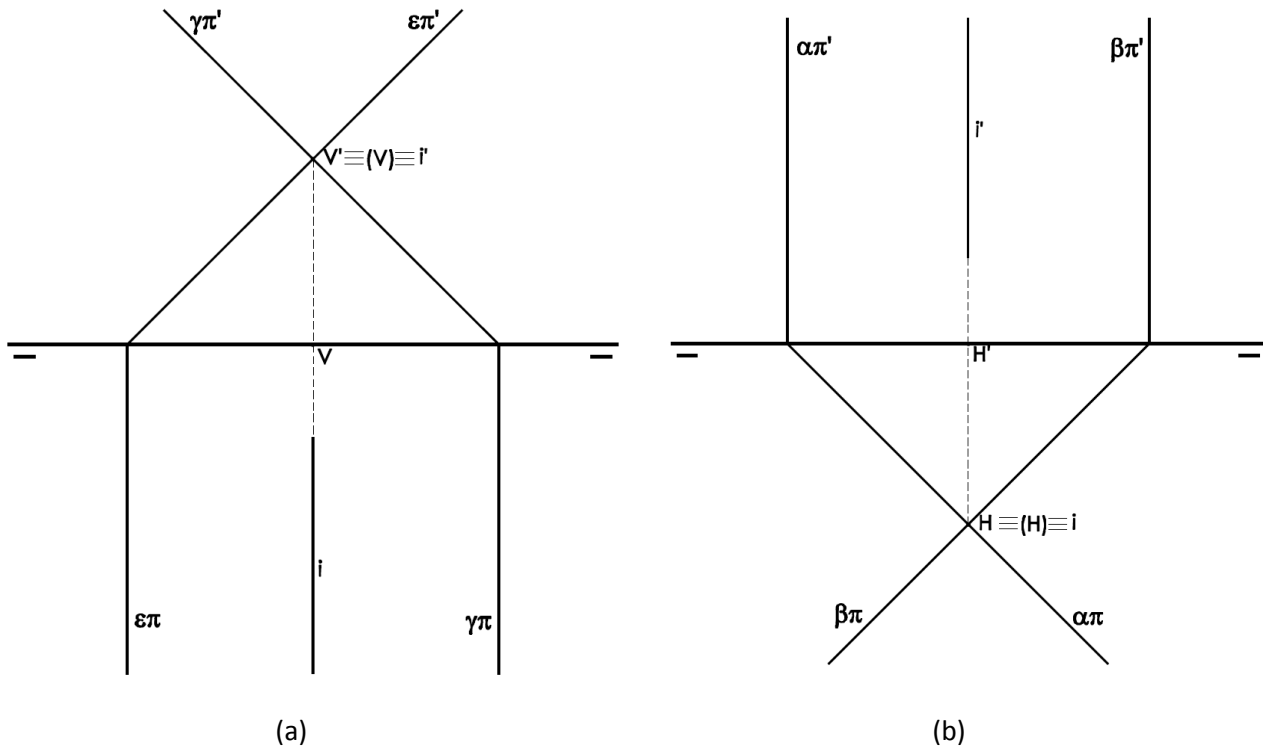


Figura 4.62 – Intersecção de dois planos de Topo (a) e de dois planos Verticais (b)

Em algumas situações, nem os traços verticais nem os traços horizontais de dois planos secantes se interceptam. É o caso de dois planos de Rampa secantes, de um plano de Rampa e um plano Que Passa pela Linha de Terra secantes ou de um plano Horizontal e um plano Frontal. Como, nesses casos, os traços dos planos secantes não se interceptam, a reta intersecção não terá nenhum traço. Assim, o único tipo de reta intersecção que pode ser formado é a reta Fronto-horizontal, que não possui traços sobre os planos de projeção.

Determinar a intersecção de um plano Horizontal e um plano Frontal é uma tarefa simples porque os dois planos são projetantes. Sabendo-se que a intersecção entre esses dois planos só pode ser uma reta Fronto-horizontal, basta que as projeções desta reta sejam posicionadas de modo a coincidirem com os traços de mesmo nome dos planos (Figura 4.63).

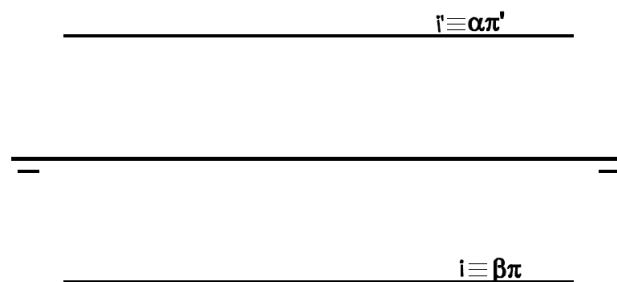


Figura 4.63 – Intersecção de um plano Horizontal e um plano Frontal

Por outro lado, a determinação da intersecção de dois planos de Rampa ou de um plano de Rampa e um plano Que Passa pela Linha de Terra é mais trabalhosa, pois estes planos não são projetantes. Nesse caso, deve-se utilizar um plano auxiliar, determinando-se a intersecção deste com os dois planos secantes. O ponto onde as duas intersecções concorrem é um ponto comum aos três planos e, portanto, é um ponto pertencente à intersecção dos dois planos secantes dados. Como a intersecção, nesses casos, é uma reta Fronto-horizontal, o conhecimento de um ponto dessa reta já viabiliza a determinação das projeções da reta intersecção.

Na Figura 4.64, o plano auxiliar ( $\gamma$ ) foi utilizado para a determinação da intersecção dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ). Inicialmente, foram determinadas as retas ( $r$ ) e ( $s$ ), intersecções do plano auxiliar ( $\gamma$ ) com os planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), respectivamente. Como essas duas retas são concorrentes no ponto ( $I$ ), este ponto é comum aos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), o que viabiliza o traçado das projecções da reta ( $i$ ), intersecção dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ). O plano auxiliar traçado é apenas um dos vários planos que poderiam ter sido utilizados para resolver o problema:

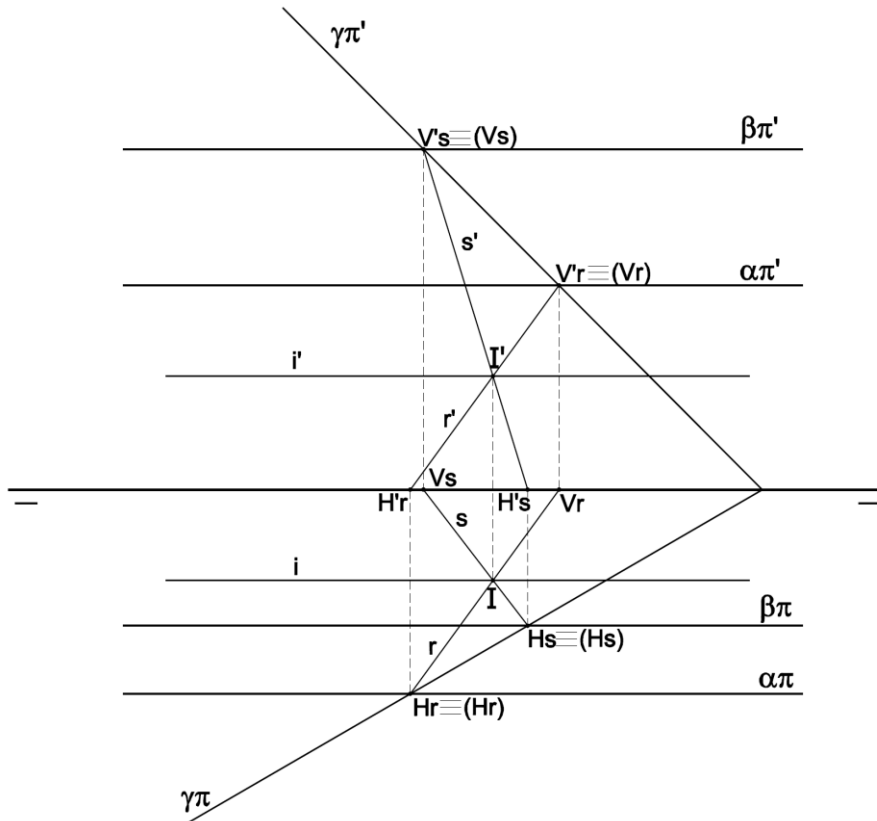


Figura 4.64 – Intersecção de dois planos de Rampa

Para saber que tipo de reta será gerado pela intersecção de dois planos, deve-se, primeiramente, analisar os tipos de plano em questão. Por exemplo, a intersecção de um plano De Topo e um plano Vertical é uma reta Qualquer, uma vez que é o único tipo de reta comum aos dois planos (ver Quadro 4.2).

Em alguns casos, o tipo de reta gerado pela intersecção de dois planos não pode ser determinado dessa forma, como, por exemplo, na intersecção de um plano Qualquer e um plano De Rampa. Nesse caso, a reta gerada pode ser Qualquer (Figura 4.65(a)) ou de Perfil (Figura 4.65(b)), dependendo da inclinação dos traços dos planos secantes, e a classificação da reta intersecção deverá ser feita após a sua determinação em épura.

Quadro 4.2 – Tipos de retas que podem estar contidas em cada tipo de plano

Tipo de plano	Tipos de retas que podem estar contidas no plano
Horizontal	Horizontal, de Topo e Fronto-horizontal
Frontal	Frontal, Vertical e Fronto-horizontal
De Topo	De Topo, Frontal e Qualquer
Vertical	Vertical, Horizontal e Qualquer
De Perfil	De Perfil, Vertical e de Topo
Qualquer	Qualquer, Horizontal, Frontal e de Perfil
Que Passa pela Linha de Terra	De Perfil, Fronto-horizontal e Qualquer
De Rampa	De Perfil, Fronto-horizontal e Qualquer

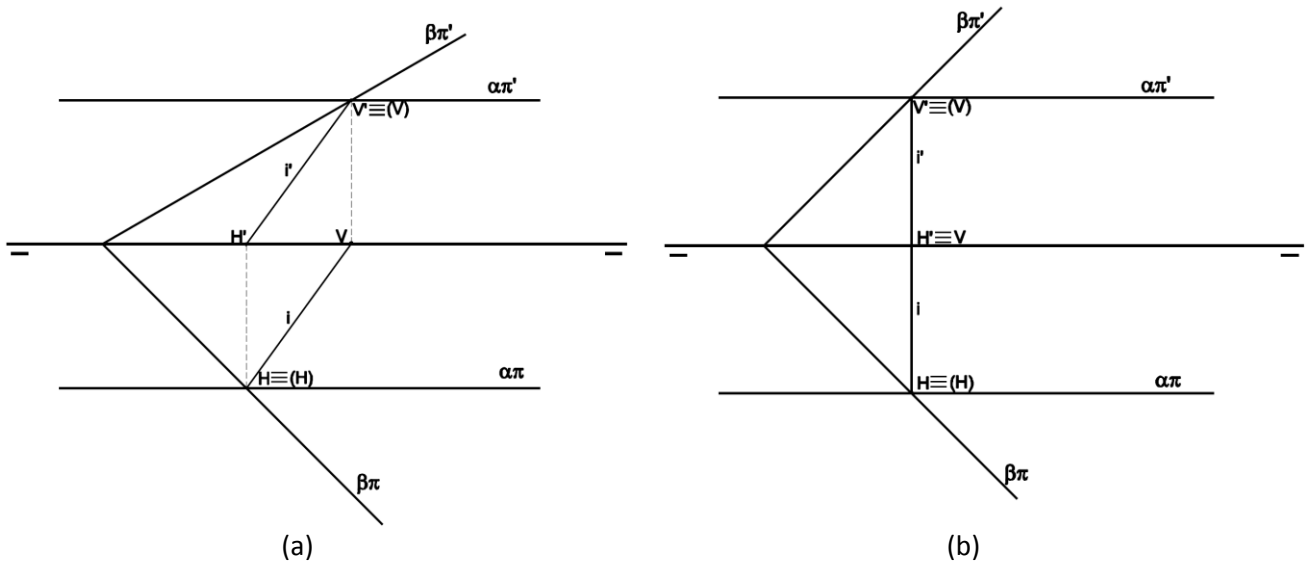


Figura 4.65 – Intersecção de um plano Qualquer e um plano de Rampa: (a) reta Qualquer e (b) reta de Perfil

#### 4.7.2 Intersecção de uma reta com um plano

A intersecção de uma reta com um plano sempre é um ponto. Esse ponto nada mais é do que o traço da reta sobre o plano ou, em outras palavras, o ponto onde a reta fura o plano.

Para se determinar a intersecção de uma reta ( $r$ ) com um plano ( $\alpha$ ), traça-se, primeiramente, um plano auxiliar ( $\beta$ ) que contenha a reta. Posteriormente, determina-se a reta ( $s$ ), intersecção dos dois planos. O ponto de concorrência ( $I$ ) da reta intersecção da reta ( $s$ ) com a reta ( $r$ ) é o ponto onde esta fura o plano (Figura 4.66(a)). Na Figura 4.66(b), a obtenção da intersecção da reta ( $r$ ) com o plano ( $\alpha$ ) foi realizada com auxílio do plano Vertical ( $\beta$ ) que contém ( $r$ ). Determinou-se a reta ( $s$ ), intersecção de ( $\alpha$ ) com ( $\beta$ ), e obteve-se o ponto ( $I$ ) de concorrência entre as duas retas. Este é o ponto onde a reta ( $r$ ) fura o plano ( $\alpha$ ).

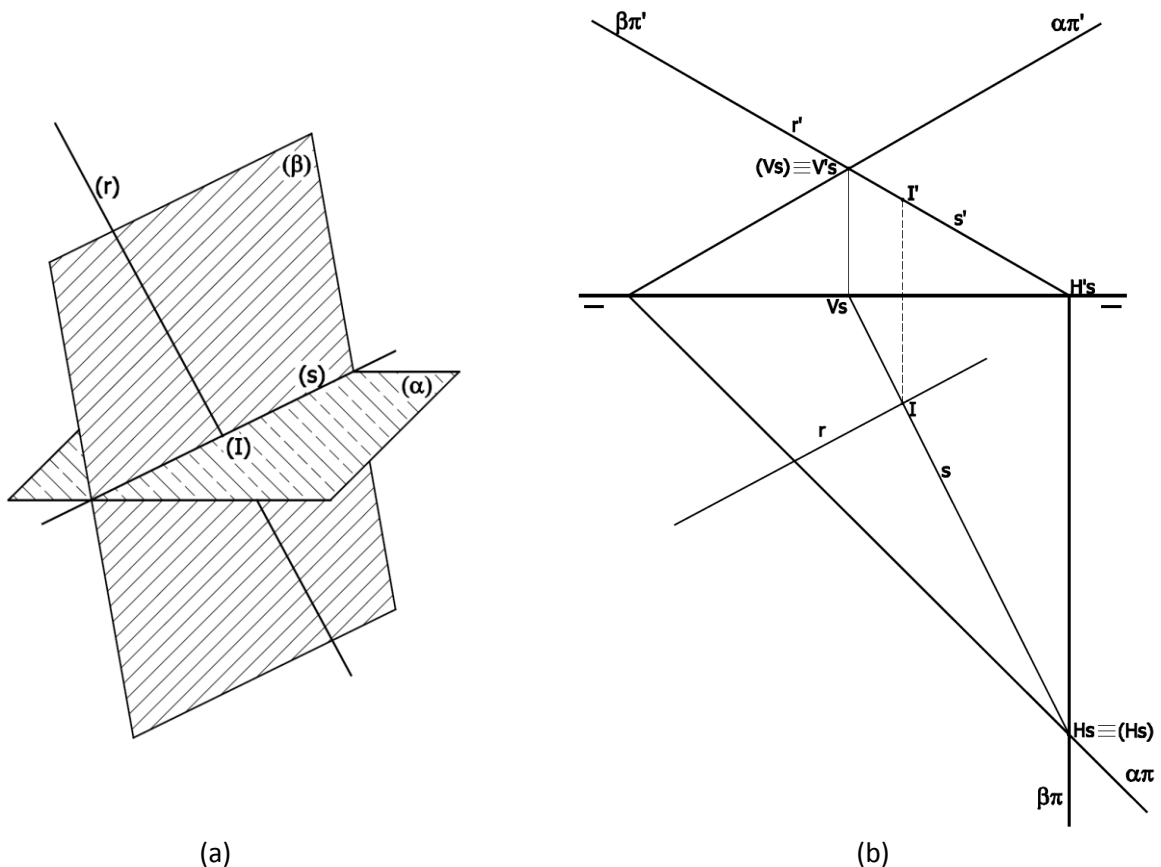


Figura 4.66 – Intersecção de uma reta e um plano: (a) no espaço e (b) em é pura

**ATIVIDADE PRÁTICA 10**

01) Determinar a intersecção dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), cujos traços se encontram, respectivamente, nos pontos (T) e (J). Dados:

$\alpha \wedge \pi' = 30^\circ$	$\alpha \wedge \pi = -45^\circ$	$\beta \wedge \pi' = 120^\circ$	$\beta \wedge \pi = -150^\circ$
(T) [ 0 ; 0 ; 0 ]	(J) [ 80 ; 0 ; 0 ]		

02) Determinar a intersecção de um plano frontal ( $\gamma$ ), que contém o ponto (A), com um plano ( $\phi$ ), cujos traços encontram-se no ponto (U). Dados:

(A) [ 40 ; 20 ; 10 ]	(U) [ 0 ; 0 ; 0 ]	$\phi \wedge \pi' = 45^\circ$	$\phi \wedge \pi = -45^\circ$
----------------------	-------------------	-------------------------------	-------------------------------

03) Determinar a intersecção de dois planos ( $\eta$ ) e ( $\lambda$ ), cujos pontos de concurso dos traços são, respectivamente, (K) e (L). Dados:

$\eta \wedge \pi' = 45^\circ$	$\eta \wedge \pi = -30^\circ$	$\lambda \wedge \pi' = 60^\circ$	$\lambda \wedge \pi = -120^\circ$
(K) [ 0 ; 0 ; 0 ]	(L) [ 60 ; 0 ; 0 ]		

04) Determinar a intersecção de dois planos ( $\rho$ ) e ( $\sigma$ ) cujos traços encontram-se num mesmo ponto (M) de  $\pi\pi'$ . Dados:

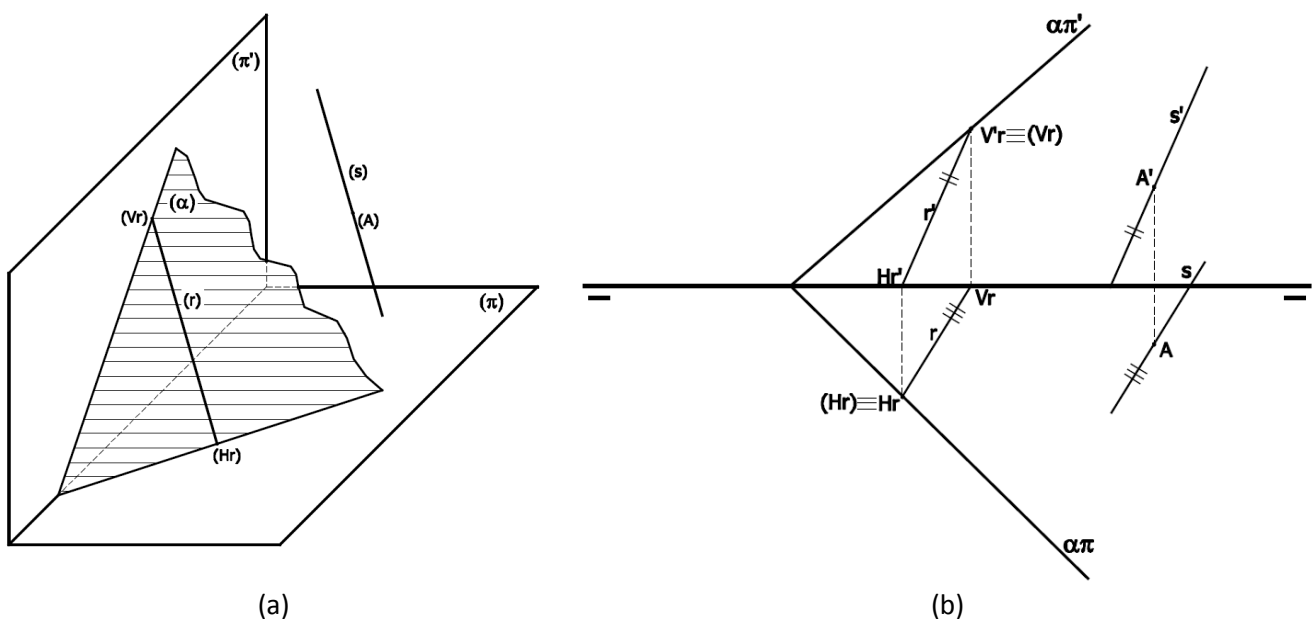
$\rho \wedge \pi' = 60^\circ$	$\rho \wedge \pi = -30^\circ$	$\sigma \wedge \pi' = 45^\circ$	$\sigma \wedge \pi = -60^\circ$
(M) [ 10 ; 0 ; 0 ]			

**4.8 PARALELISMO DE RETAS E PLANOS**

**4.8.1 Reta paralela a plano**

Para que uma reta seja paralela a um plano, basta que ela seja paralela a uma reta desse plano. Em é pura, não é necessário que as projeções da reta sejam paralelas aos traços do plano para que a reta seja paralela ao plano, ainda que isso ocorra em determinadas situações.

Na Figura 4.67, para se traçar, pelo ponto (A), uma reta paralela ao plano ( $\alpha$ ), traçou-se inicialmente uma reta (r) pertencente ao plano. Posteriormente, traçou-se a reta (s) paralela à reta (r). Por ser paralela a uma reta do plano ( $\alpha$ ), a reta (s) é paralela ao plano ( $\alpha$ ). Este tipo de problema é indeterminado, uma vez que um plano pode conter infinitas retas com as mais variadas inclinações, e todas podem ser utilizadas como auxiliares para o traçado de uma reta paralela ao plano.



(a) (b)  
 Figura 4.67 – Reta paralela a plano: (a) no espaço e (b) em é pura

#### 4.8.2 Plano paralelo a reta

Para que um plano seja paralelo a uma reta dada, deve conter uma reta paralela a ela. Em épura, não é necessário que os traços do plano sejam paralelos às projeções da reta para que o plano seja paralelo à reta, ainda que isso possa ocorrer em certos casos.

Quando se deseja traçar um plano que contenha um determinado ponto e seja paralelo a uma reta dada, deve-se traçar, pelo ponto, uma reta auxiliar paralela à reta dada. Determinando-se os traços da reta auxiliar, é possível obter-se infinitos planos que a contém, todos paralelos a reta dada, o que demonstra que este problema também é indeterminado.

Na Figura 4.68, para se traçar pelo ponto (A) um plano paralelo à reta (r), primeiramente traçou-se por este ponto uma reta auxiliar (s) paralela à reta (r). Determinando-se os traços da reta (s), é possível obter diversos planos que a contém e que, portanto, são paralelos à reta (r). Como exemplo, foram traçados os planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) que satisfazem a questão, pois ambos são paralelos à reta (r) por conterem a reta (s).

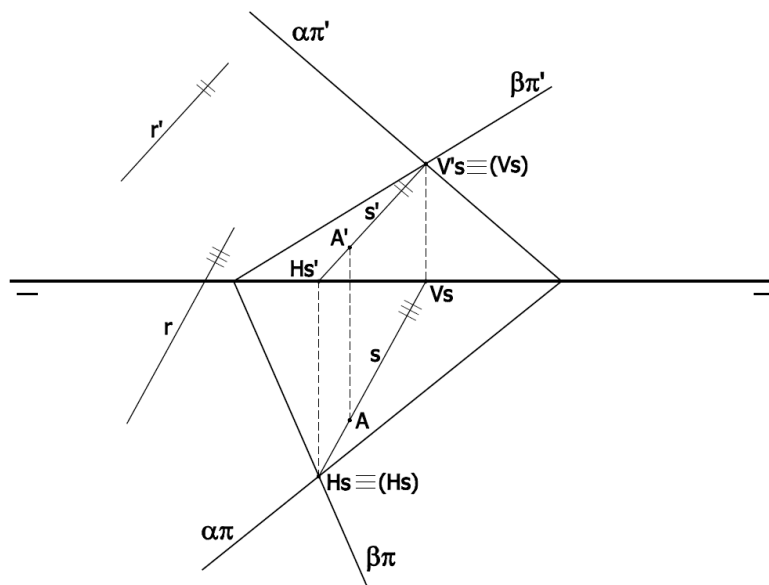


Figura 4.68 – Planos paralelos a uma reta dada

##### 4.8.2.1 Plano paralelo a duas retas reversas

Para se determinar um plano paralelo a duas retas reversas, deve-se obter duas retas concorrentes auxiliares, cada uma paralela a uma das retas dadas. As duas retas concorrentes auxiliares definem um plano paralelo, simultaneamente, às duas retas reversas, uma vez que o plano contém uma reta paralela a cada uma das retas dadas.

Na Figura 4.69, traçou-se, pelo ponto (A), um plano ( $\alpha$ ) paralelo às retas reversas (r) e (s). Para tanto, obteve-se uma reta auxiliar (t) paralela à reta (r) e uma reta auxiliar (u) paralela à reta (s), concorrentes no ponto (A). Por serem concorrentes, as retas (t) e (u) definem um plano ( $\alpha$ ). Este plano ( $\alpha$ ), por conter uma reta paralela a (r) e uma reta paralela a (s), é paralelo às retas (r) e (s). Caso o ponto (A) não fosse definido, o problema seria indeterminado, podendo-se estabelecer o ponto de concorrência em qualquer lugar do espaço.





Normalmente, o problema consiste em traçar, por um ponto, um plano paralelo a outro previamente conhecido. Quando o plano conhecido é projetante, não há dificuldades em traçar-se um plano que contenha o ponto e, ao mesmo tempo, tenha traços paralelos ao plano conhecido. Contudo, quando o plano dado é não projetante, deve-se traçar primeiramente uma reta auxiliar que contenha o ponto e, em seguida, determinar o plano que contém essa reta e é paralelo ao plano dado. Se o plano for Qualquer, a reta auxiliar deve ser frontal ou horizontal, com a projeção oblíqua à linha de terra paralela ao traço de mesmo nome do plano dado.

Na Figura 4.71, para se traçar, pelo ponto (A), um plano ( $\beta$ ) paralelo ao plano ( $\alpha$ ), traçou-se, primeiramente, a reta auxiliar (s), Frontal, por esse ponto, tomando-se cuidado para que a projeção vertical da reta ficasse paralela ao traço vertical do plano ( $\alpha$ ). Após a determinação do traço horizontal da reta (s), obteve-se o traço horizontal do plano ( $\beta$ ), paralelo ao traço correspondente do plano ( $\alpha$ ). A partir do ponto de concurso dos traços, obteve-se o traço vertical do plano ( $\beta$ ), paralelo ao traço correspondente do plano ( $\alpha$ ) e, conseqüentemente, paralelo à projeção vertical da reta (s). Além de ter seus traços paralelos aos traços de mesmo nome plano ( $\alpha$ ), o que garante o paralelismo entre os planos, o plano ( $\beta$ ) contém a reta (s) e, conseqüentemente, o ponto (A).

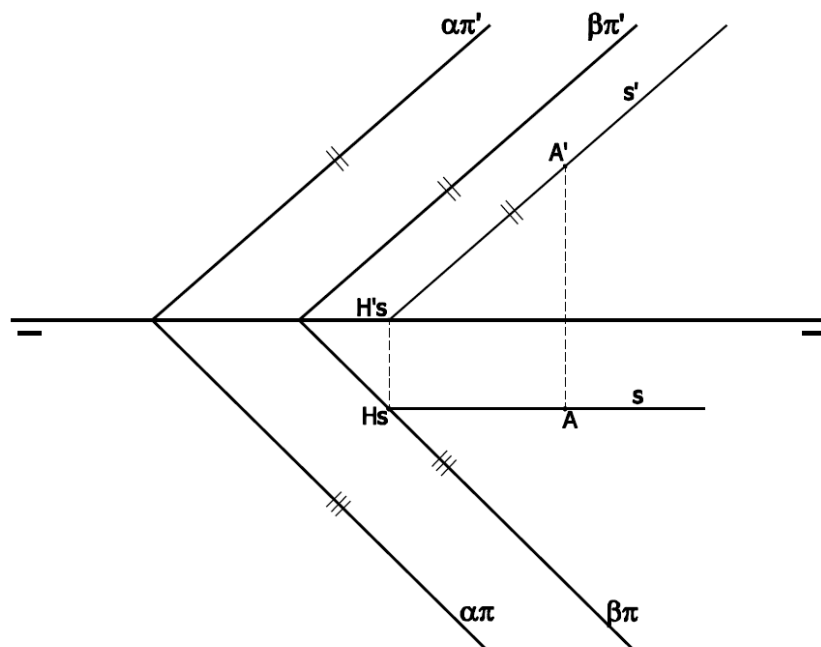


Figura 4.71 – Plano paralelo a plano

Quando se deseja saber se dois planos De Rampa ou um plano De Rampa e um plano Que Passa Pela Linha de Terra são paralelos, deve-se utilizar um plano auxiliar e determinar as intersecções deste com os dois planos dados. Se as intersecções forem paralelas, os planos são paralelos, caso contrário, os planos são secantes.

Na Figura 4.72, a verificação do paralelismo dos planos ( $\beta$ ) e ( $\alpha$ ) foi realizada com o auxílio de um plano auxiliar ( $\gamma$ ), Qualquer. Para tanto, determinou-se a intersecção entre ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), nomeada de (r), e a intersecção entre ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ), nomeada de (s). Como as retas (r) e (s) não são paralelas, pode-se concluir que os planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) são secantes. Mesmo que fosse utilizado outro plano auxiliar, o resultado seria o mesmo, ou seja, as retas obtidas não seriam paralelas.

Caso os planos ( $\beta$ ) e ( $\alpha$ ) fossem paralelos, as intersecções do plano auxiliar ( $\gamma$ ) com os planos dados seriam paralelas. Essa situação é apresentada na Figura 4.73, onde os planos ( $\beta$ ) e ( $\alpha$ ) são dispostos em novas posições. Nesse caso, as intersecções do plano auxiliar ( $\gamma$ ) com os planos dados são paralelas e, portanto, os planos ( $\beta$ ) e ( $\alpha$ ) são paralelos. Mesmo que fosse utilizado um outro plano auxiliar, o resultado seria o mesmo.

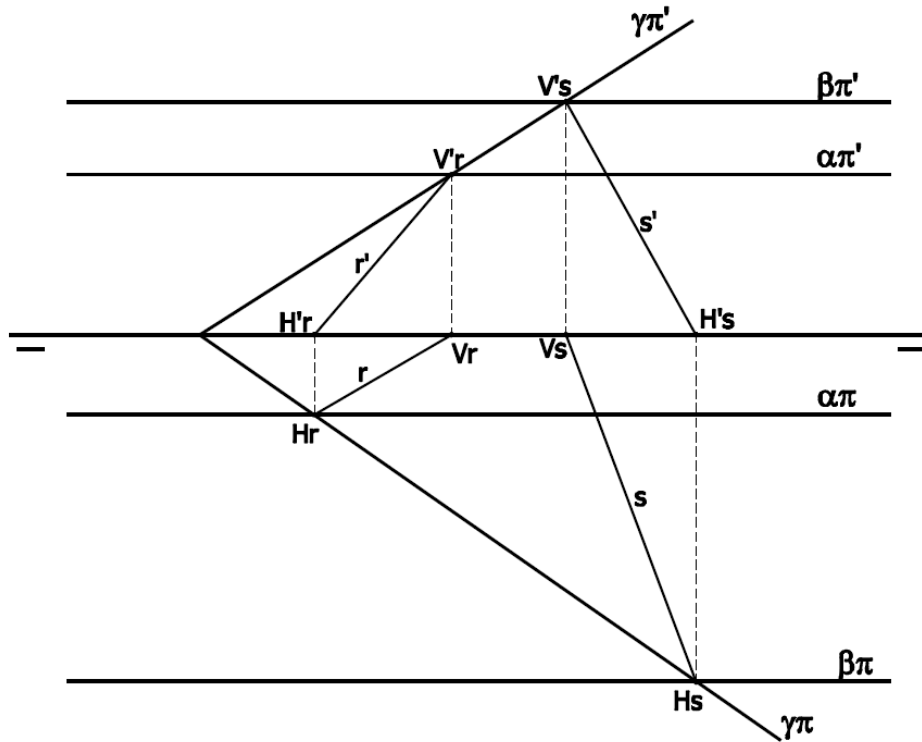


Figura 4.72 – Verificação do paralelismo de dois planos de Rampa

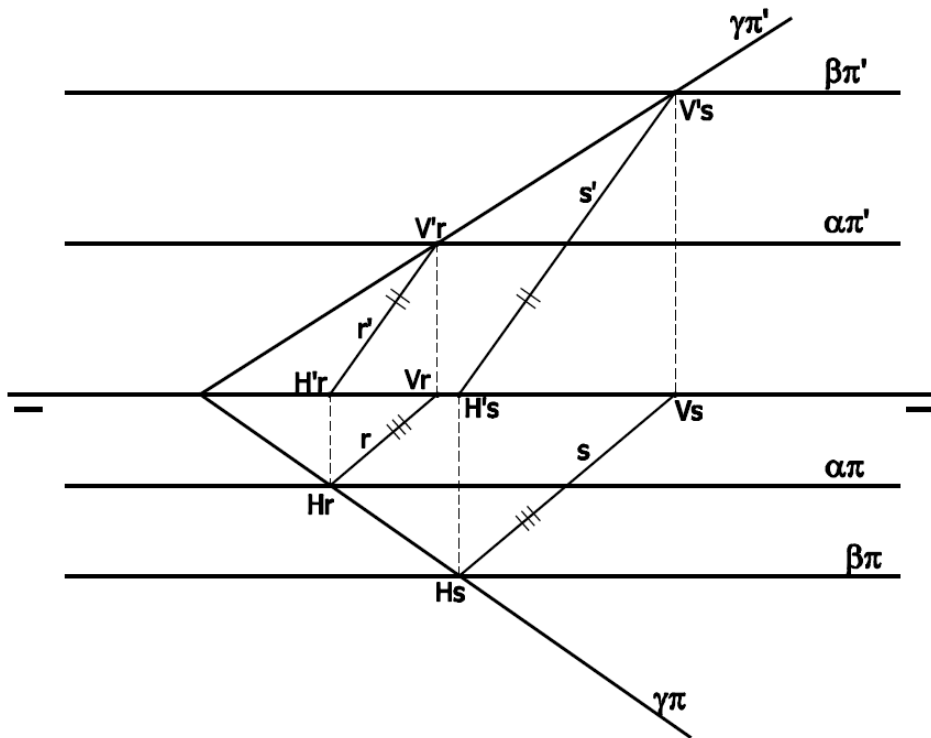


Figura 4.73 – Verificação do paralelismo de dois planos de Rampa

## ATIVIDADE PRÁTICA 11

01) Traçar, pelo ponto (A), uma reta (s) paralela ao plano ( $\alpha$ ) e, pelo ponto (B), no bissetor ímpar, uma reta (u) paralela ao plano ( $\beta$ ), sabendo-se que o ponto de concurso dos traços dos dois planos é o ponto (T).

Dados:

$$(A) [ 120 ; 20 ; 30 ]$$

$$(B) [ 0 ; 10 ; ? ]$$

$$(T) [ 50 ; 0 ; 0 ]$$

$$\alpha \wedge \pi' = 90^\circ$$

$$\alpha \wedge \pi = -45^\circ$$

$$\beta \wedge \pi' = 120^\circ$$

$$\beta \wedge \pi = -150^\circ$$

02) Traçar um plano ( $\gamma$ ) que seja paralelo à reta (E)(F) e que passe pela reta (C)(D). Dados:

$$(C) [ 70 ; 40 ; 0 ]$$

$$(D) [ 100 ; 0 ; 35 ]$$

$$(E) [ 0 ; 20 ; 10 ]$$

$$(F) [ 30 ; 50 ; 25 ]$$

03) Traçar um plano ( $\phi$ ) paralelo às retas (G)(K) e (I)(J). Dados:

$$(G) [ 0 ; 20 ; 10 ]$$

$$(K) [ 20 ; 30 ; 30 ]$$

$$(I) [ 100 ; 10 ; 25 ]$$

$$(J) [ 120 ; 50 ; 5 ]$$

04) Verificar se os planos ( $\eta$ ) e ( $\lambda$ ) são paralelos, sabendo-se que ambos são paralelos à linha de terra.

Dados:

$$\text{Cota de } \eta \wedge \pi' = 10 \text{ mm}$$

$$\text{Afastamento de } \eta \wedge \pi = 20 \text{ mm}$$

$$\text{Cota de } \lambda \wedge \pi' = 20 \text{ mm}$$

$$\text{Afastamento de } \lambda \wedge \pi = 40 \text{ mm}$$

## 4.9 PERPENDICULARISMO DE RETAS E PLANOS

### 4.9.1 Reta perpendicular a plano

Uma reta é perpendicular a um plano quando é ortogonal a duas retas concorrentes do plano. Na Figura 4.74, a reta (u) é perpendicular ao plano por ser ortogonal às retas (r) e (s), pertencentes ao plano. A reta (t) também é perpendicular ao plano, pois é perpendicular (e, portanto, ortogonal) às duas retas concorrentes.

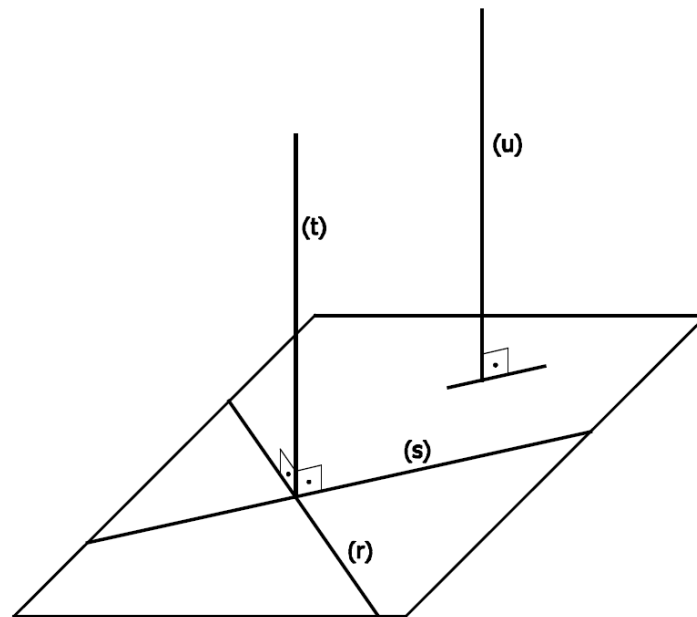


Figura 4.74 – Reta perpendicular a plano

Em é pura, quando uma reta é perpendicular a um plano as suas projeções são perpendiculares aos traços de mesmo nome do plano (Figura 4.75), o que facilita tanto o traçado de uma reta perpendicular a um plano quanto a verificação do perpendicularismo entre eles.

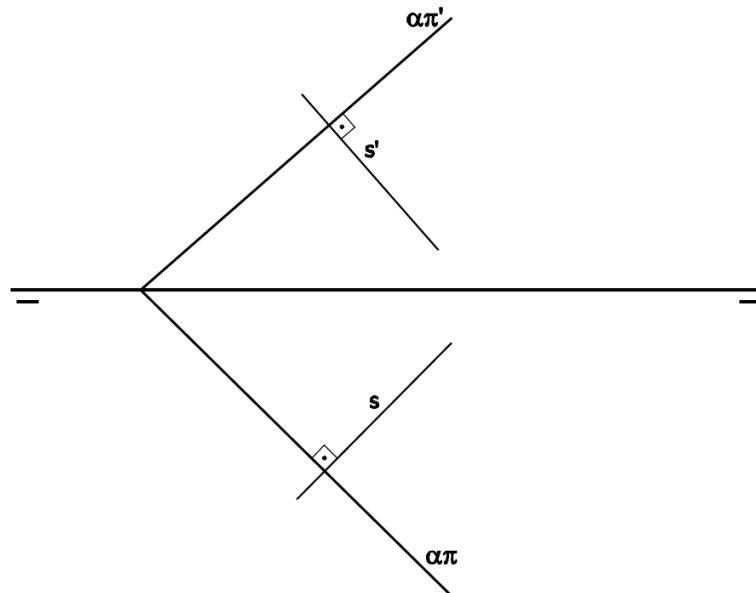


Figura 4.75 – Reta perpendicular a plano

As exceções a essa regra são o plano Que Passa pela Linha de Terra e o plano de Rampa, para os quais não é suficiente que as projeções da reta sejam perpendiculares aos traços correspondentes do plano para que haja perpendicularismo entre eles.

Para se determinar, em é pura, se uma reta dada é perpendicular a um plano Que Passa pela Linha de Terra ou a um plano De Rampa, deve-se verificar, inicialmente, se a reta é de Perfil, já que este é o único tipo de reta que pode ser perpendicular a estes dois tipos de plano. Se a reta for de Perfil, suas projeções serão necessariamente perpendiculares aos traços desses dois tipos de plano. Mesmo assim, não há certeza de que a reta é perpendicular ao plano, porque todas as retas de Perfil têm traços perpendiculares aos traços de qualquer plano Que Passa pela Linha de Terra ou De Rampa, mas nem todas são perpendiculares a estes dois tipos de plano. Assim, deve-se traçar uma reta de Perfil auxiliar pertencente ao plano dado e rebater as duas retas. Se as duas retas, ao serem rebatidas, formarem um ângulo de  $90^\circ$  entre si, serão ortogonais, e a reta de Perfil dada será perpendicular ao plano.

Cada tipo de plano admite apenas um tipo de reta perpendicular a ele. Os tipos de retas que podem ser perpendiculares a cada tipo de plano são apresentados no Quadro 4.3.

Quadro 4.3 – Tipo de reta perpendicular a cada tipo de plano

Tipo de plano	Tipo de reta perpendicular ao plano
Horizontal	Vertical
Frontal	De Topo
De Topo	Frontal
Vertical	Horizontal
De Perfil	Fronto-horizontal
Qualquer	Qualquer
Que Passa pela Linha de Terra	De Perfil
De Rampa	De Perfil

#### 4.9.2 Plano perpendicular a reta

Um plano é perpendicular a uma reta quando contém duas retas concorrentes ortogonais a essa reta. Em épura, quando um plano é perpendicular a uma reta os seus traços são perpendiculares às projeções de mesmo nome da reta, da mesma forma que no caso de reta perpendicular a plano (Figura 4.75). Igualmente, as exceções a essa regra são o plano Que Passa pela Linha de Terra e o plano De Rampa.

Para se traçar, por um ponto, um plano perpendicular a uma reta, deve-se, primeiramente, verificar se o plano a ser traçado é projetante ou não projetante (essa verificação pode ser realizada com auxílio do Quadro 4.3). Se o plano a ser traçado for projetante, pode-se obtê-lo diretamente. Se o plano for não projetante, deve-se traçar uma reta auxiliar que contenha o ponto e, posteriormente, fazer passar por ela o plano procurado.

Assim, para se traçar por um ponto (B) um plano ( $\beta$ ) perpendicular à reta Horizontal (t), procede-se como apresentado na Figura 4.76. Como o plano é Vertical e, portanto, projetante, o seu traçado foi realizado sem a utilização de reta auxiliar. Bastou, para tanto, que o traço horizontal do plano fosse traçado perpendicularmente à projeção horizontal da reta (t), passando pela projeção horizontal do ponto (B). O traço vertical do plano ( $\beta$ ) foi traçado perpendicularmente à linha de terra, após a obtenção do ponto de concurso dos traços do plano.

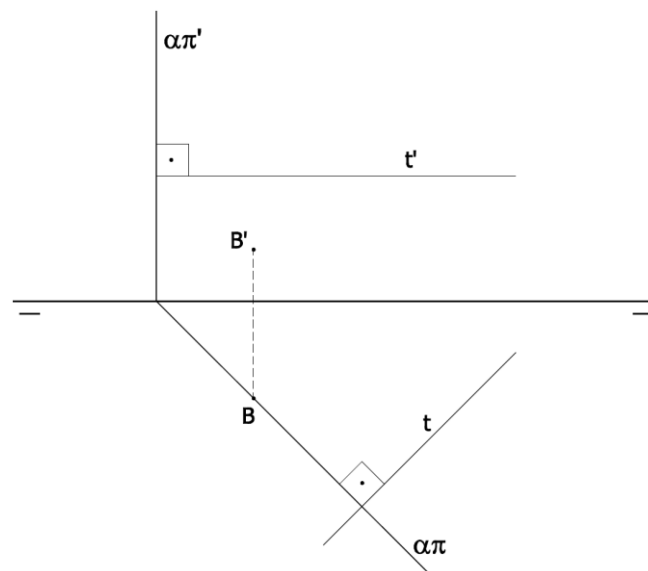


Figura 4.76 – Plano perpendicular a uma reta Horizontal

Na Figura 4.77, ilustra-se o traçado de um plano ( $\alpha$ ) que contém o ponto (A) e é perpendicular à reta Qualquer (r). Inicialmente, traçou-se, pelo ponto (A), uma reta auxiliar (s). No caso, foi utilizada uma reta Frontal, com projeção vertical perpendicular à projeção vertical da reta (r). Esse perpendicularismo entre as projeções não implica que as duas retas (r) e (s) sejam perpendiculares, mas é imprescindível que ele exista para que o plano obtido seja perpendicular à (r) e contenha o ponto (A). Após a obtenção do traço horizontal da reta auxiliar (s), traçou-se por ele o traço horizontal do plano ( $\alpha$ ), perpendicularmente à projeção horizontal da reta (r). Finalmente, o traço vertical do plano ( $\alpha$ ) foi traçado perpendicularmente à projeção vertical da reta (r) e, conseqüentemente, paralelamente à projeção vertical da reta auxiliar (s). Também poderia ter sido utilizada uma reta auxiliar Horizontal e, nesse caso, a sua projeção horizontal deveria ser traçada perpendicularmente à projeção horizontal da reta (r), procedendo-se de maneira análoga ao descrito para a reta Frontal.

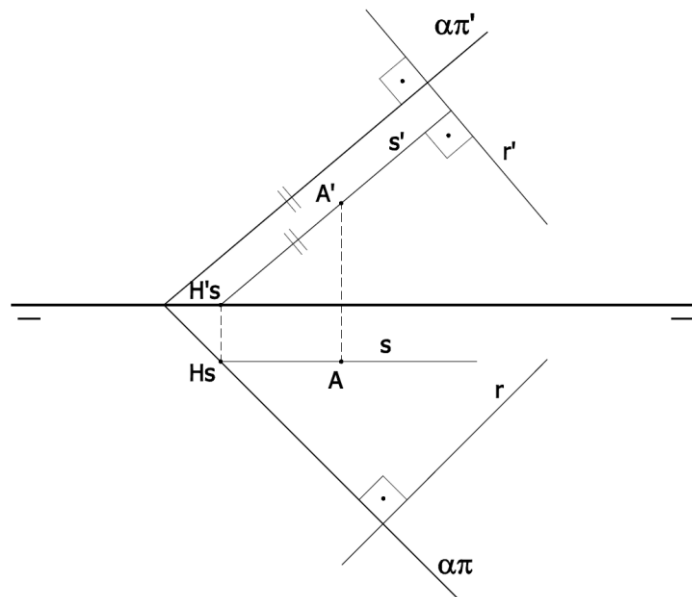


Figura 4.77 – Plano perpendicular a uma reta Qualquer

#### 4.9.3 Plano perpendicular a plano

Dois planos são perpendiculares quando um deles contém uma reta perpendicular ao outro. Na Figura 4.78, os planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  são perpendiculares porque  $(\beta)$  contém uma reta perpendicular a  $(\alpha)$ .

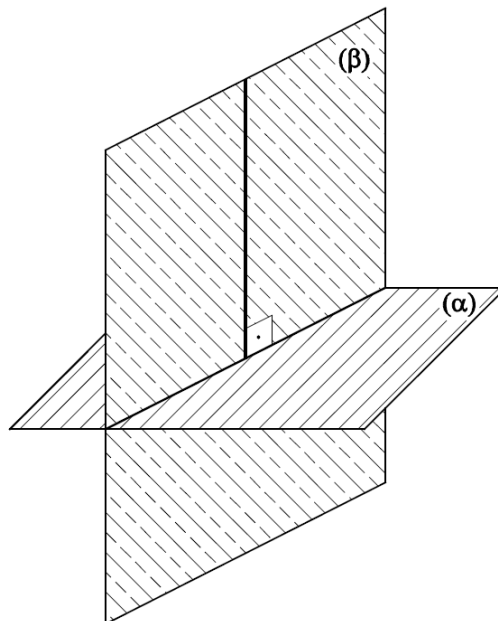


Figura 4.78 – Plano perpendicular a plano

Em é pura, quando se deseja encontrar um plano perpendicular a outro, basta traçar uma reta perpendicular a este e, posteriormente, traçar um plano que contenha esta reta. Como uma determinada reta pode estar contida em um número infinito de planos, esse tipo de problema é indeterminado. Na Figura 4.79, para se encontrar um plano perpendicular ao plano  $(\alpha)$  que contivesse o ponto (A), traçou-se, por esse ponto, a reta (r), perpendicular ao plano  $(\alpha)$ . Posteriormente, traçou-se um plano  $(\beta)$  que continha a reta (r) e, conseqüentemente, era perpendicular ao plano  $(\alpha)$ . O plano  $(\beta)$  é apenas um dos infinitos planos que contém o ponto (A) e são perpendiculares ao plano  $(\alpha)$ .

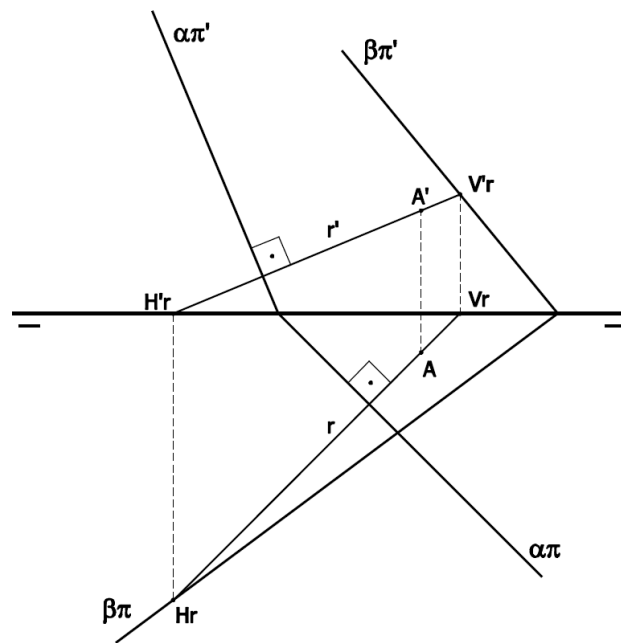


Figura 4.79 – Traçado de um plano perpendicular a outro em épura

É importante salientar que, ao contrário do que ocorre com reta perpendicular a plano e plano perpendicular a reta, nem sempre o ângulo reto será visualizado em épura quando dois planos forem perpendiculares. Na Figura 4.79, por exemplo, os planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  são perpendiculares mas não é possível visualizar-se o ângulo reto em épura. Para que o ângulo fique visível em épura, é necessário que pelo menos um dos planos perpendiculares seja projetante. Se o plano projetante for perpendicular ao plano horizontal de projeção, os traços horizontais dos dois planos apresentarão o ângulo reto em épura. Por outro lado, se o plano projetante for perpendicular ao plano vertical de projeção, os traços verticais dos dois planos é que apresentarão o ângulo reto em épura.

#### 4.9.3.1 Plano perpendicular a dois planos dados

Para se traçar um plano perpendicular a dois planos dados podem ser utilizadas duas metodologias distintas. Uma delas consiste em determinar a intersecção dos dois planos dados e, posteriormente, traçar um plano que seja perpendicular a essa intersecção. Sendo perpendicular à intersecção dos dois planos dados, o plano traçado será perpendicular a uma reta comum aos dois planos ou, em outras palavras, os dois planos dados satisfarão a exigência de conter uma reta perpendicular ao plano traçado. Esse foi o método utilizado para a determinação do plano  $(\gamma)$ , perpendicular aos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  da Figura 4.80.

A outra metodologia consiste em determinar duas retas concorrentes, cada uma perpendicular a um dos planos dados. O plano definido por essas duas retas concorrentes será perpendicular aos dois planos dados, pois conterá uma reta perpendicular a cada um desses planos. Na Figura 4.81, ilustra-se a aplicação dessa metodologia para a obtenção do plano  $(\gamma)$ , perpendicular aos mesmos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  da Figura 4.80.

O plano  $(\gamma)$  encontrado na Figura 4.80 é o mesmo que foi encontrado na Figura 4.81. A obtenção do mesmo plano nos dois exemplos foi realizada de propósito, para demonstrar que as duas metodologias permitem a obtenção do mesmo resultado. Contudo, em ambos os exemplos, outros planos poderiam ter sido obtidos como resposta, evidenciando que este é um problema indeterminado. Na Figura 4.81, outras retas perpendiculares aos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  poderiam ter sido obtidas e, nesse caso, o plano perpendicular aos dois planos dados seria outro. Da mesma forma, na Figura 4.80, o plano perpendicular à intersecção dos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  poderia ter sido traçado em outra posição, uma vez que não foi estabelecido que ele deveria passar por um ponto específico. O problema deixa de ser indeterminado se for estabelecido um ponto pelo qual o plano perpendicular aos dois planos dados deva passar. Nesse caso, independentemente da metodologia utilizada, a resposta será única.

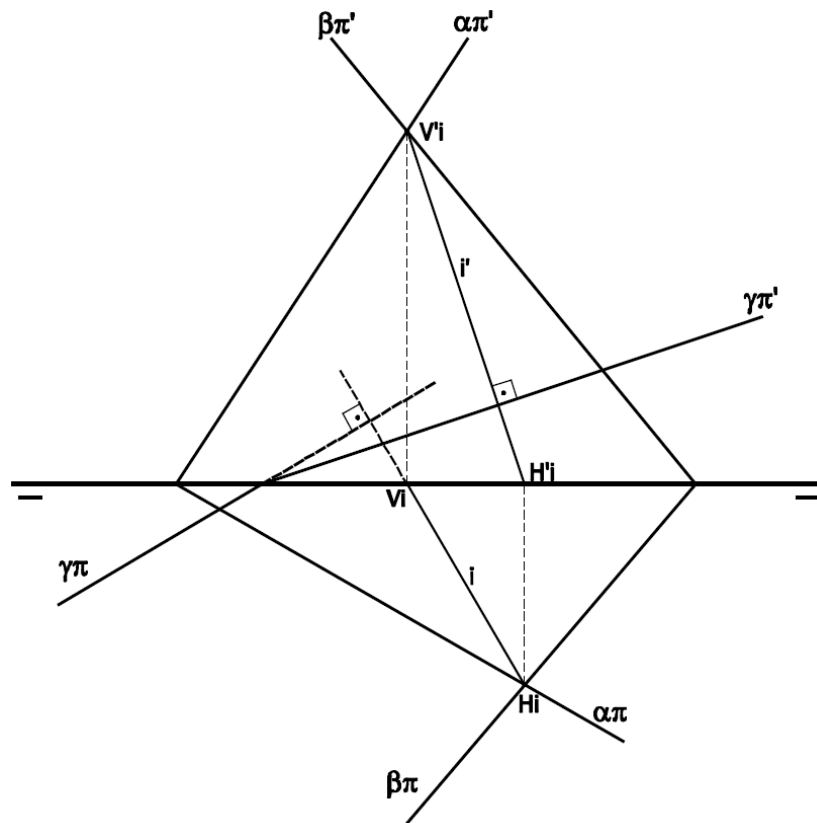


Figura 4.80 – Traçado de um plano perpendicular a dois planos dados a partir da sua intersecção

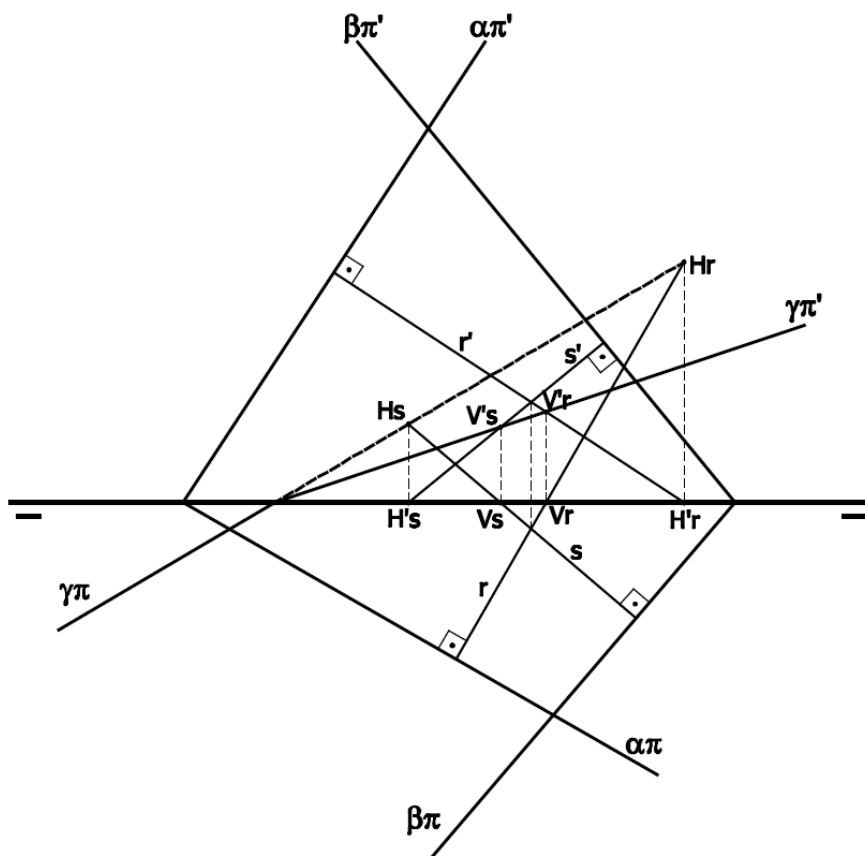


Figura 4.81 – Traçado de um plano perpendicular a dois planos dados a partir de duas retas perpendiculares





#### 4.9.4 Retas perpendicular a reta

Se uma reta é perpendicular a outra, existe um plano perpendicular a uma delas que contém a outra. Geralmente, a determinação, em épura, de uma reta perpendicular a outra é uma tarefa simples. Isso acontece porque quando uma das retas perpendiculares é paralela a um dos planos de projeção, o ângulo reto é projetado em verdadeira grandeza nesse plano. Quando duas retas De Perfil ou uma reta De Topo e uma reta Vertical são perpendiculares, o ângulo reto aparece em verdadeira grandeza após o rebatimento das duas retas. Porém, quando as duas retas perpendiculares são do tipo Qualquer, o ângulo reto não aparece em verdadeira grandeza em nenhuma das projeções, o que torna mais complicada a verificação do perpendicularismo.

É importante lembrar que uma reta só pode ser perpendicular a retas de determinados tipos. No Quadro 4.4 são apresentados os tipos de reta que podem ser perpendiculares a cada tipo de reta.

Quadro 4.4 – Retas que podem ser perpendiculares a cada tipo de reta

Tipo de reta	Tipos de reta que podem ser perpendiculares
Horizontal	Horizontal, Qualquer e Vertical
Frontal	Frontal, Qualquer e de Topo
Fronto-horizontal	de Topo, Vertical e de Perfil
de Topo	Frontal, Vertical e Fronto-horizontal
Vertical	Horizontal, de Topo e Fronto-horizontal
de Perfil	de Perfil, Qualquer e Fronto-horizontal
Qualquer	Qualquer, Horizontal, Frontal e de Perfil

Para se traçar, por um ponto, uma reta perpendicular a uma reta Qualquer, deve-se determinar o traço dessa reta sobre o plano perpendicular a ela que contém o ponto dado. Esse traço é o ponto de concorrência da reta Qualquer com a reta perpendicular a ela. Conhecendo-se esse ponto e o ponto dado inicialmente, é possível traçar a reta que é perpendicular à reta dada.

Em resumo, para se traçar por um ponto uma reta perpendicular a uma reta Qualquer, deve-se seguir os seguintes passos: (i) conduzir, pelo ponto dado, um plano auxiliar perpendicular à reta dada; (ii) conduzir, pela reta dada, um outro plano auxiliar, em qualquer posição no espaço (geralmente utiliza-se um plano de Topo ou um plano Vertical, pela facilidade em se determinar os seus traços); (iii) determinar a intersecção dos dois planos auxiliares traçados; (iv) determinar o ponto de concorrência dessa intersecção com a reta Qualquer; (v) unir o ponto de concorrência com o ponto dado. O segmento formado no passo (v) é perpendicular à reta Qualquer.

A Figura 4.82 ilustra a aplicação desses passos para se traçar pelo ponto (A) uma reta perpendicular à reta Qualquer (B)(C). Inicialmente, traçou-se pelo ponto (A) uma reta auxiliar (r), de modo a possibilitar a obtenção de um plano auxiliar ( $\alpha$ ) que, além de ser perpendicular a (B)(C), contivesse o ponto (A). Posteriormente, traçou-se, pela reta (B)(C), um outro plano auxiliar ( $\beta$ ) (optou-se por um plano de Topo por este ser projetante, mas também poderia ter sido utilizado um plano Vertical ou um plano Qualquer). Em seguida, determinou-se a reta (i), intersecção dos dois planos auxiliares, obtendo-se o ponto (I) de concorrência desta com a reta (B)(C). Este ponto corresponde ao traço da reta (B)(C) sobre o plano ( $\alpha$ ) que, unido ao ponto (A), forma o segmento de reta perpendicular à reta (B)(C). Note-se que o ângulo reto entre os dois segmentos perpendiculares não aparece em verdadeira grandeza na épura, conforme explicado anteriormente.

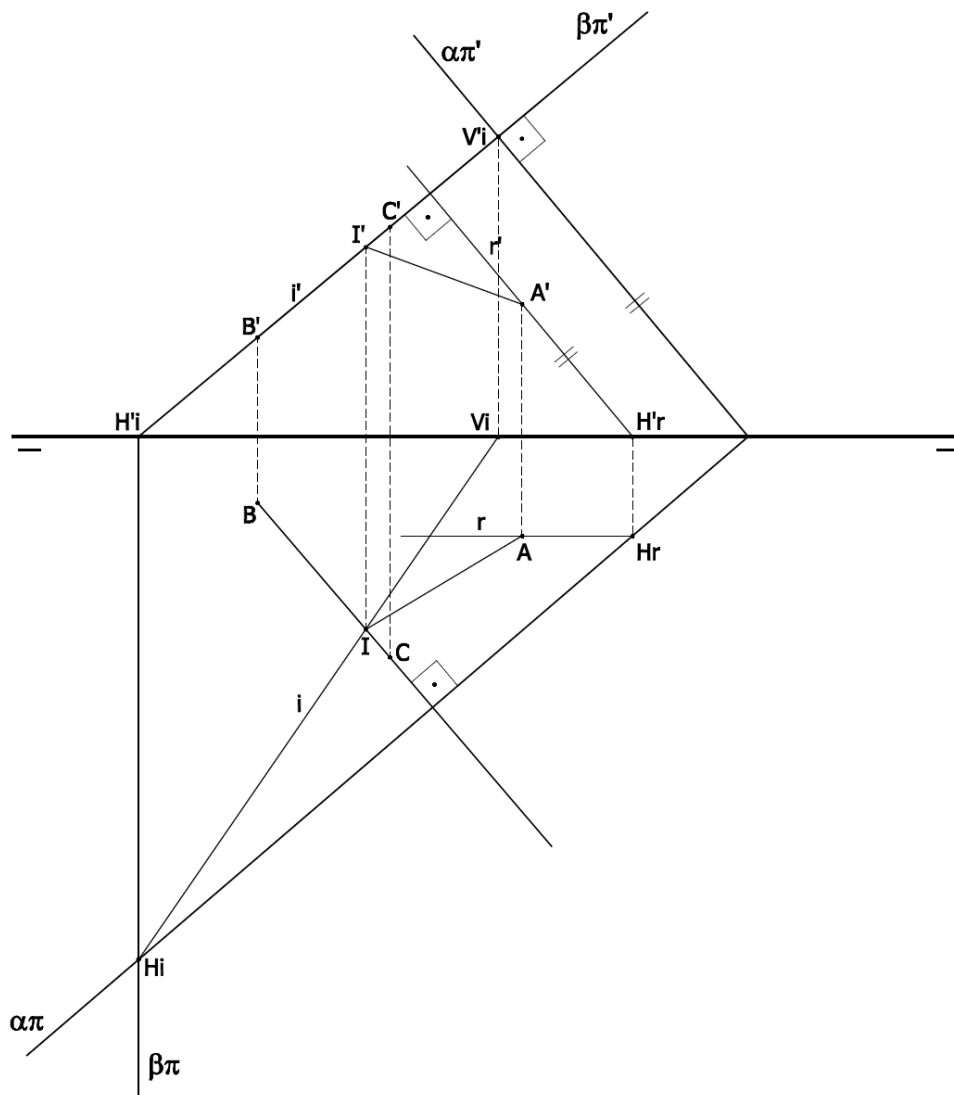


Figura 4.82 – Traçado de uma reta perpendicular a uma reta Qualquer

Quando uma reta Frontal ou uma reta Horizontal é perpendicular a uma reta Qualquer, o ângulo reto aparece em verdadeira grandeza em uma das projeções, devido ao paralelismo que as retas frontais e horizontais apresentam em relação a um dos planos de projeção. Assim, quando uma reta Horizontal e uma reta Qualquer são perpendiculares, as projeções horizontais das duas retas apresentam, em épura, o ângulo reto em verdadeira grandeza. Da mesma forma, quando uma reta Frontal e uma reta Qualquer são perpendiculares, as projeções verticais das duas retas apresentam, em épura, o ângulo reto em verdadeira grandeza.

Assim, para se traçar, pelo ponto (A) da Figura 4.83(a) uma reta (r) perpendicular à reta Horizontal (B)(C), basta que a projeção horizontal da reta (r) seja traçada perpendicularmente à projeção horizontal de (B)(C). Posteriormente, determina-se o ponto de concorrência (M) das duas retas e, finalmente, traça-se a projeção vertical da reta (r) pela projeção vertical do ponto (M).

De maneira análoga, para se traçar, pelo ponto (D) da Figura 4.83(b) uma reta (s) perpendicular à reta Frontal (E)(F), basta que a projeção vertical da reta (s) seja traçada perpendicularmente à projeção vertical de (E)(F). Posteriormente, determina-se o ponto de concorrência (N) das duas retas e, finalmente, traça-se a projeção horizontal da reta (s) pela projeção horizontal do ponto (N).

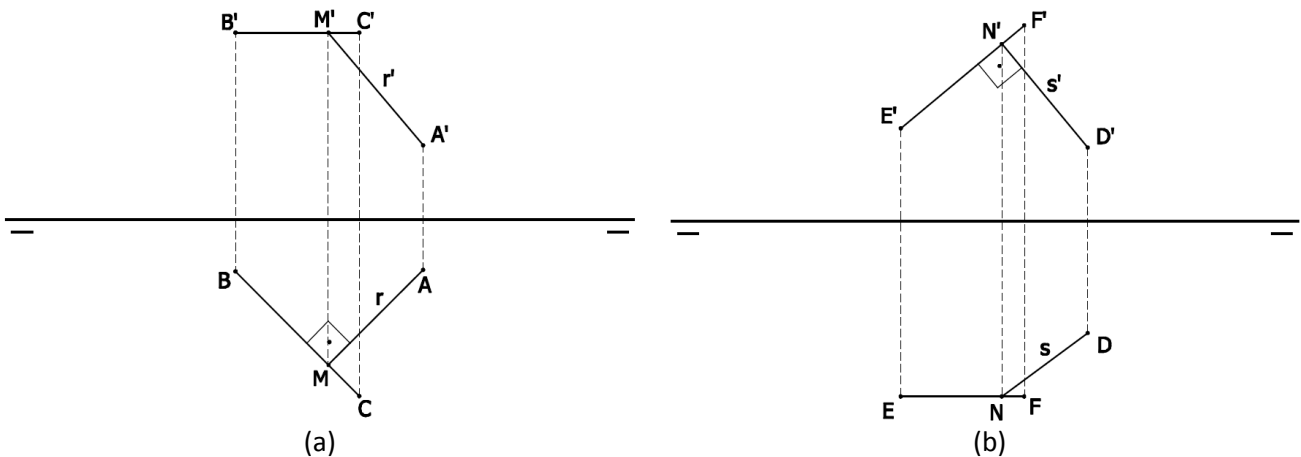


Figura 4.83 – Traçado de uma reta Qualquer perpendicular a uma reta Horizontal (a) e a uma reta Frontal (b)

### ATIVIDADE PRÁTICA 12

01) Pelo ponto (A), traçar uma reta perpendicular ao plano definido pelos pontos (B), (C) e (D). Dados:

(A) [ 30 ; 25 ; 30 ]      (B) [ 30 ; 0 ; 10 ]      (C) [ 50 ; 20 ; 5 ]      (D) [ 70 ; 10 ; 25 ]

02) Traçar, pelo ponto (E), uma reta perpendicular ao plano bisetor par. Dados:

(E) [ 50 ; 20 ; 10 ]

03) Traçar, pelo ponto (F), um plano perpendicular à reta (G)(R) e, pelo ponto (I), um plano perpendicular à reta (J)(K). Dados:

(F) [ 25 ; 10 ; 15 ]      (G) [ 30 ; 30 ; 25 ]      (R) [ 50 ; 20 ; 10 ]  
 (I) [ 70 ; 15 ; 10 ]      (J) [ 80 ; 30 ; 20 ]      (K) [ 100 ; 15 ; 20 ]

04) Traçar, pelo ponto (L), um plano ( $\beta$ ), perpendicular ao plano ( $\alpha$ ), cujo ponto de concurso dos traços é o ponto (T). Dados:

(L) [ 40 ; 15 ; 25 ]      (T) [ 0 ; 0 ; 0 ]       $\alpha \wedge \pi' = 45^\circ$        $\alpha \wedge \pi = -45^\circ$

05) Traçar uma reta (M)(N) perpendicular à reta (P)(Q). Dados:

(M) [ 30 ; 20 ; 5 ]      (P) [ 10 ; 20 ; 40 ]      (Q) [ 50 ; 40 ; 0 ]



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARVALHO, B. A. **Desenho geométrico**. 2 ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 2008.

LACOURT, H. **Noções e fundamentos de geometria descritiva**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1995.

MONTENEGRO, G. **Geometria descritiva**. v.1. São Paulo: Edgard Blücher, 2004.

PEREIRA, A. A. **Geometria descritiva 1**. Rio de Janeiro: Quartet, 2001.

PRÍNCIPE JUNIOR, A. dos R. **Noções de Geometria Descritiva**. v.1. São Paulo: Nobel, 1983.

SILVA, A.; RIBEIRO, C. T.; DIAS, J.; SOUSA, L. **Desenho técnico moderno**. 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

GASPARD MONGE. In: Wikipedia, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2011. Disponível em: <[http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaspard\\_Monge&oldid=26974930](http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaspard_Monge&oldid=26974930)>. Acesso em: 26 set. 2011.